# ОБОБЩЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В ТЕХНИКЕ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ: автореферат диссертации ... доктора технических наук: 01.02.06

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson
Академический институт создания всеобщих наук (Мюнхен)
Мюнхен: Издательство Всемирной Академии наук «Коллегиум», 1993, 1994, 2022

ОБОБЩЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В ТЕХНИКЕ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ: автореферат диссертации ... доктора технических наук: 01.02.06

Гелимсон Лев Григорьевич,
доктор технических наук в разделе «Физико-математические науки» по Классификатору Высшей Аттестационной Комиссии,
директор, Академический институт создания всеобщих наук, Мюнхен, Германия,
E-mail: Leohi@mail.ru Web: http://scie.atspace.org/WhoIsWho.pdf

Аннотация. Созданы и развиты иерархические математическая, метрологическая, оптико-механическая и прочностная системы принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов как теоретический фундамент для разработки теорий (с открытием и обоснованием систем принципиально новых явлений и законов) и простых замкнутых общих аналитических методов рациональных комплексных инженерных исследования, проектирования и управления системами напряжённо-деформированных состояний и процессов, жёсткости, прочности и оптических свойств именно существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов техники высоких давлений, в частности с концентраторами напряжений, трением и взаимными сцеплением и проскальзыванием.

Ключевые слова: физическая математика, общая метрология с циклически симметричной концентрацией напряжений, общая теория процессов трёхмерной осесимметричной механики с упругостью и трением, общая теория прочности с запасом, разрушение, критерий предельных состояний, общая теория функций напряжений Лява, формула Ламе, Гадолин, решение Кирша, оптика, расфокусировка, переменное нагружение. УДК 539.3, 539.4, 539.5
Мюнхен: Издательство Всемирной Академии наук «Коллегиум», 1993, 1994, 2022

GENERALIZATION OF ANALYTICAL METHODS FOR SOLVING STRENGTH PROBLEMS OF TYPICAL STRUCTURAL ELEMENTS IN HIGH PRESSURE ENGINEERING: Dr. Sc. Dissertation in Engineering: Abstract: 01.02.06

Gelimson Lev Grigorevic,
Ph. D. & Dr. Sc. in Engineering
in the section “Physical and Mathematical Sciences”
by the Highest Attestation Commission Classifier,
Director, Academic Institute for Creating Universal Sciences, Munich, Germany,
E-mail: Leohi@mail.ru Web: http://scie.atspace.org/WhoIsWho.pdf

Abstract. The fundamentals of the hierarchical mathematical, metrological, optical-mechanical and strength systems of principally new general theories, methodologies and methods have been created and developed as a theoretical foundation for creating theories (with the discovery and justification of systems of fundamentally new phenomena and laws) and simple closed general analytical methods of rational integrated engineering investigation, design and control of the systems of the stress-strain states and processes, strength and optical properties of typical essentially three-dimensional load-bearing and transparent elements and systems of various configurations in high-pressure engineering also with stress concentrators, friction and mutual adhesion and slippage.

Keywords: physical mathematics, general metrology with cyclically symmetric stress concentration, general theory of three-dimensional axisymmetric mechanics processes with elasticity and friction, general strength and reserve theory, limit state criterion, fracture, optics, defocusing, Lame formula, compound cylinder, Gadolin solution, Kirsch solution, variable loading. UDC 539.3, 539.4, 539.5
Publishing House of the All-World Academy of Sciences "Collegium", Munich, 1993, 1994, 2022

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ (2022) АВТОРЕФЕРАТА НАСТОЯЩЕЙ ДОКТОРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

Второе издание (1994) автореферата настоящей докторской диссертации, представленное к её защите, было сокращено примерно вдвое по сравнению с первым изданием (1993), чтобы уменьшить объём до общепринятого для авторефератов докторских диссертаций по разделу «Физико-математические науки» Классификатора Высшей Аттестационной Комиссии. В диссертации (годы изданий 1992, 1993, 2022) сокращению примерно вчетверо, с более чем полутора тысяч использованных наименований до приведённых 399, подвергся список научных трудов. Было резко сокращено всё изложенное в принадлежащей автору четвёртой главе (одной трети научной монографии) [22], в кандидатской диссертации автора

(Гелимсон Лев Г. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06. Киев: Ин-т проблем прочности АН УССР, 1987. 148 с.)

и в целом ряде его единоличных научных монографий [38, 39], а также статей.

В третьем издании (2022) автореферата настоящей докторской диссертации во многом восстанавливаются содержание и объём первого издания автореферата (1993).

Академия наук Украины
Институт проблем прочности
Сумской физико-технологический институт
ГЕЛИМСОН Лев Григорьевич

УДК 539.4 : 620.193 : 621.772

# ОБОБЩЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В ТЕХНИКЕ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ

01.02.06 Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры
Автореферат диссертации на соискание учёной степени доктора технических наук
Киев 1994
Работа выполнена в Институте проблем прочности Академии наук Украины и в Сумском физико-технологическом институте
Научный консультант:
академик Академии наук Украины, доктор технических наук, профессор
Георгий Степанович ПИСАРЕНКО
Официальные оппоненты:
член-корреспондент (академик с 1997) Академии наук Украины, доктор технических наук, профессор
Юрий Николаевич ШЕВЧЕНКО
доктор технических наук, профессор
Николай Максимович БОРОДАЧЁВ
доктор технических наук, старший научный сотрудник
Павел Павлович ВОРОШКО
Ведущая организация:
Институт проблем машиностроения Академии наук Украины, г. Харьков
Защита состоится 09.06.1994 г. в 9.30 на заседании Специализированного учёного совета Д 016.33.01 в Институте проблем прочности Академии наук Украины по адресу: 252014, Киев-14, ул. Тимирязевская, 2
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем прочности Академии наук Украины.
Автореферат разослан 05.05.1994 г.

Учёный секретарь Специализированного учёного совета
доктор технических наук
Феликс Фёдорович ГИГИНЯК

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБОБЩЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В ТЕХНИКЕ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ: автореферат диссертации ... доктора технических наук: 01.02.06....................1
Введение. Общая характеристика настоящей докторской диссертации....................3
1. Известные методы проектирования в технике высоких давлений....................13
2. Создание системы общих теорий, методологий и методов аналитического решения общих систем функциональных уравнений как общих задач математики, метрологии, механики и прочности....................16
3. Применение созданной системы общих теорий, методологий и методов для создания теорий деформирования, жёсткости, оптики, прочности и разрушения сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений....................44
4. Приложение созданной системы общих теорий, методологий и методов к выдвижению принципов и созданию методов рационального управления прочностью светопрозрачных и несущих элементов и их соединений средствами уплотнительной техники при высоких давлениях....................47
5. Общая теория измерения физических величин и общая теория принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных состояний и процессов, прочности и технологичности элементов и систем техники высоких давлений с учётом трения, взаимных сцепления и проскальзывания и концентрации напряжений....................48
6. Создание теорий деформирования и прочности усложнённых элементов и соединений техники высоких давлений....................55
Заключение. Основные результаты и выводы....................59
Список главных из 105 научных публикаций с основным содержанием настоящей докторской диссертации....................61
Приложения. Система дальнейших математических, метрологических, механических и прочностных обобщений. Справки о практическом использовании и акты внедрения основных результатов настоящей докторской диссертации....................63

**Введение. Общая характеристика настоящей докторской диссертации**

Во введении дан анализ проблем по теме диссертации, обоснована её актуальность, указаны основные положения для защиты, отмечены научная новизна и практическая значимость результатов работы, поставлены цель и задачи, выбраны методы и средства исследований.

Актуальность настоящей докторской диссертации заключается в следующем. Для оптимального проектирования конструкций, работающих в экстремальных условиях высоких удельных нагрузок, недостаточны численные и экспериментальные методы исследований напряжённо-деформированных состояний и прочности их частей. Эти методы действуют с постоянными и пригодны для поверочных расчётов конструкций с выбранными размерами, а перебор вариантов неэффективен при многопараметрической оптимизации. Чтобы учесть отдельное влияние каждого из исходных параметров и выбрать рациональное сочетание их значений в эскизном проекте, нужны аналитические функциональные зависимости целевых параметров оптимизации от совокупностей исходных параметров с разумным компромиссом простоты и точности. Анализ многих известных результатов показывает, что распределения перемещений и напряжений в элементах конструкций можно приблизить очень простыми формулами с инженерной точностью. Такие формулы известны для упрощённых расчётных

схем балок, пластин, плит, оболочек, неприемлемых для существенно трёхмерных объектов. Да и к ним вынужденно применяются эти расчётные схемы, поскольку другие известные аналитические методы обычно сводят задачи механики деформируемого твёрдого тела к сложным математическим проблемам, не позволяют получить простые расчётные формулы и решить задачи прочности и, как и численные и экспериментальные методы, нуждаются в испытании замкнутыми аналитическими решениями для целых типов задач, проверяемыми и удобными для поиска закономерностей деформирования и разрушения трёхмерных тел.
Тем более необходимо и полезно создание иерархических математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов как теоретического фундамента теорий и простых замкнутых общих аналитических методов рациональных комплексных инженерных исследования, проектирования и управления системами напряжённо-деформированных состояний, жёсткости, прочности и оптики именно существенно трёхмерных элементов техники высоких давлений, в т. ч. линейно упругих тел вращения под осесимметричными кусочно-гладкими поверхностными нагрузками. Научные исследования в этом насущном направлении относятся к проблемам динамики, прочности машин, приборов и аппаратуры.
Эта докторская диссертация обобщает результаты НИР во ВНИИкомпрессормаш (1974–1981 гг.) и в Сумском физико-технологическом институте (1981–1993 гг.) автора единолично (теории и обработка экспериментов) и при его личном участии (замысел и осуществление экспериментов) как ответственного исполнителя и научного руководителя хоздоговорных и госбюджетных тем, в том числе темы 1.10.2.11-63 по Постановлению № 474 Президиума АН Украины от 27.12.1985 г. и темы 63.01.09.86-90/48-С, отнесённой Президиумом АН Украины к числу важнейших, по целевой комплексной программе ГКНТ 074.01 «Мировой океан» и утверждённому АН Украины научному направлению Сумского физико-технологического института «Оптико-механические проблемы в современной глубоководной технике».
Целью этой докторской диссертации является создание, основоположение и практически целесообразное идейное развитие иерархических математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем принципиально новых общих теорий и методов как теоретического фундамента разработки теорий и простых замкнутых общих аналитических методов рациональных комплексных инженерных исследования, проектирования и управления системами напряжённо-деформированных состояний и процессов, жёсткости, прочности и оптических свойств именно существенно трёхмерных типовых несущих и светопрозрачных элементов и систем техники высоких давлений, в том числе с концентраторами напряжений, трением и взаимными сцеплением и проскальзыванием.
Основные задачи данной докторской диссертации, вытекающие из этой цели – создание принципиально новых общих теорий, методологий и методов и их систем. Среди них –
1. Математическая система принципиально новых общих теорий, методологий и методов:
1.1) теория количественных множеств с любыми количествами элементов для всеобщих законов сохранения и для моделирования любых совокупностей с развитием теории Кантора;
1.2) теория общих математических задач как количественных множеств функциональных отношений с известными операторами над искомыми функциями известных аргументов;
1.3) теории полной линейности оператора и полных линейных независимости и зависимости даже для бесконечной линейной комбинации, при которых из её аннулирования непременно следует или не обязано следовать соответственно аннулирование всех её коэффициентов;
1.4) теория собственной совокупности видов (классов), в т. ч. собственного вида (класса), функций для множества операторов (глубокое обобщение собственной функции оператора);
1.5) полная линейно-комбинационная методология решения общих математических задач и для общих решений общим (полу)степенным методом гармонического и бигармонического уравнений в (полу)степенных рядах как собственных классах функций для операторов;
1.6) целочастичная (парциальная) методология с разбиением системы функциональных отношений задачи на разрешающую подсистему простейших отношений и на остаточную оценочную подсистему сложнейших отношений, в т. ч. для общего интегрального метода;

1.7) теория простого (на единый ненулевой множитель) и сложного (на свои ненулевые множители для различных отношений) умножения системы отношений наподобие простого и сложного нагружений в механике и общая теория дополнительных альтернативных новых действий (минус-умножения и минус-деления, минус-остепенения и минус-укоренения) с обобщением степенных, показательных, степенно-показательных функций на отрицательные основания для критериев прочности ввиду её повышения при равном трёхосном сжатии.

2. Метрологическая система принципиально новых общих теорий, методологий и методов:

2.1) общие теории и методы измерения физических величин, оценки и исправления погрешностей усреднения при измерениях неоднородных распределений, в частности

2.1.1) теория самопогрешности, открытие явления принципиально новой самопогрешности физической величины и реального объекта с невязкой сопряжения его и идеальной расчётной схемы и понятиями действительной единоразмерности и практической несоизмеримости;

2.1.2) теория искажения данных при измерениях существенно неоднородных распределений;

2.1.3) теория погрешностей усреднения при измерениях явно неоднородных распределений;

2.1.4) теория обращения общего оператора усреднения с решением проблем существования, единственности и точного или приближённого построения такого обращения;

2.1.5) теория и методы определения коэффициентов мультипликации, дающих наибольшее значение измеряемой неоднородно распределённой величины по измеренным её значениям;

2.1.6) теория и методы определения коэффициентов мультипликации для концентрации напряжений при электротензометрии в двумерных расчётных схемах и трёхмерных объектах;

2.2) общие теории неточных псевдорешений, их наилучших квазирешений, их приближений, всеобщей погрешности как меры неточности, обобщающей нечёткую приближённость, с мерой несовместности противоречивой задачи, в частности переопределённой задачи при обработке данных, и с общими методами дополнительной косвенной аналитической оценки;

2.3) общая теория запаса с общей методологией всеобщего запаса (обобщением всеобщей погрешности впервые измеряющего надёжность точности для суперпсевдорешения задачи), мультипликативной и аддитивной методологиями общего запаса как функции индивидуальных запасов множеств значений независимых переменных в гильбертовых пространствах, с непрерывными всеобщей логикой и иерархиями псевдоправильности, псевдоточности и псевдорешений и с открытием философского закона перехода анализа как общенаучного метода от качественного различения к количественному измерению различий;

2.4) общие теории и методы наилучших аналитических приближений к дискретным экспериментальным данным с их разбросом при опоре на лучшие из них и при взвешенном учёте всех данных без исключения выбросов, в т. ч. для методов исследований напряжённо-деформированных состояний и прочности конструкций при высоких давлениях, в частности

2.4.1) общая теория анализа приемлемости методов обработки данных с доказанными изъянами абсолютной и относительной погрешностей и метода наименьших квадратов;

2.4.2) теории и общие методы наименьших нормально взвешенных степеней, уравновешивания отношений общей задачи и выравнивания их частных погрешностей;

2.4.3) теория и общие методы взвешивания данных для опоры на лучшие из них при учёте всех данных с формулами метода наименьших квадратов без его произвольных выбросов;

2.4.4) теория и общие методы простейших приближений полной кривой усталости Вёлера.

3. Оптико-механическая система принципиально новых общих теорий, методологий и методов:

3.1) теория открытых закономерных инвариантных самопредельных всеобщих напряжений;

3.2) теория открытых иерархичности типов схем нагружения, общего, основного типов схем;

3.3) общие (полу)степенной и интегральный аналитические методы макроэлементов как (полу)степенная и интегральная модификации аналитической методологии макроэлементов;

3.4) теории и методы минимизации и устранения невязок сопряжения решений для макроэлементов разбиения трёхмерного тела между собой и с граничными условиями;

3.5) теории осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного и кольцевого трёхмерных цилиндрических тел при различных условиях уравновешивания;

3.6) теории принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных процессов составного цилиндра конечной длины при его тепловой сборке и запрессовке с понятиями напрягающе-деформирующего процесса и остаточно-рабочего простого нагружения;
3.7) теория влияния осесимметричного изгиба именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента, на его оптические свойства.
4. Прочностная система принципиально новых общих теорий, методологий и методов:
4.1) общая теория прочности материалов с открытием первых всеобщих прочностных законов природы во всеобщих напряжениях, в том числе исправляющим и обобщающим приведением к ним известных критериев предельных состояний и прочности, в частности
4.1.1) теории прочности постоянно нагруженных изотропных или анизотропных материалов, одинаково или различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, и общие методы приведения напряжений к скалярным всеобщим напряжениям для таких материалов;
4.1.2) теория прочности переменно нагруженных любых материалов и общие методы приведения напряжённых процессов к постоянным векторным всеобщим напряжениям;
4.1.3) методология (теория и общие методы) исправления критериев предельных состояний с общим понятием линейно прочного материала (и тела);
4.1.4) методология (теория и общие методы) универсализации прочностных данных;
4.1.5) методология открытия всеобщих прочностных законов природы и их иерархий;
4.2) общая теория прочности объектов с обобщениями всеобщих прочностных законов природы на непредельные состояния с запасом прочности при сложном нагружении, в т. ч.
4.2.1) теории равносильной множественности и выбора критерия предельных состояний;
4.2.2) теории мультипликативного и аддитивного запасов любого непредельного состояния;
4.2.3) теория частных запасов, в том числе выражаемых через единый для них запас, с учётом наиболее опасного сочетания взаимно независимых нагрузок при сложном нагружении;
4.2.4) теория выбора всеобщего прочностного закона природы для задачи прочности объекта;
4.2.5) теории прочности существенно трёхмерных тел различных конфигураций, в том числе с концентраторами напряжений, трением и взаимными сцеплением и проскальзыванием;
4.2.6) методология построения простых замкнутых (общих) аналитических методов решения и решений существенно трёхмерных (типов соответственно) задач механики и прочности.
5. Методология открытия и обоснования механической, прочностной и оптической систем принципиально новых явлений и законов напряжённо-деформированных состояний, жёсткости, оптики, прочности, запаса и разрушения существенно трёхмерных тел с уточнением и развитием классических закономерностей и методология открытия системы всеобщих явлений и законов.
6. Методология проверки приемлемости созданных математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем многовариантных общих теорий, методологий и методов.
7. Теории функционально допустимого и технологически осуществимого рационального комплексного управления напряжённо-деформированными состояниями, прочностью и оптикой именно существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов и систем различных конфигураций, в том числе с концентраторами напряжений, трением, сцеплением и проскальзыванием.
8. Методы рационального комплексного проектирования (с учётом открытых явлений и законов напряжённо-деформированных состояний, жёсткости, оптики, прочности, запаса и разрушения) с внедрением эффективных существенно трёхмерных реальных конструкций для высокого давления, в т. ч. защищённых авторскими свидетельствами на изобретения.
В основе настоящей докторской диссертации лежит общий принцип допустимой простоты: при необходимости и возможности выбирается простейшее аналитическое выражение помимо заведомо несоответствующих известным данным. В механике деформируемого твёрдого тела этот принцип предписывает выбирать при необходимости и возможности для произвольного напряжения простейшее статически возможное (удовлетворяющее уравнениям равновесия и граничным условиям) аналитическое представление.

Главные выдвинутые и осуществлённые идеи настоящей докторской диссертации:
идея любой количественности элементов для моделирования произвольных совокупностей с всеобщими законами сохранения, обобщением и развитием теории множеств Кантора;
идея минус-остепенения умножением функции знака основания на степень его модуля;
идея общих математических задач как множеств функциональных отношений (уравнений, неравенств) с известными операторами над искомыми функциями известных аргументов;
идея возможного обесконечивания линейных комбинаций для полной линейности оператора и для полноты линейной независимости и линейной зависимости;
идея собственной совокупности видов (классов) функций для множества операторов;
идея разбиения задачи на простейшую разрешающую и сложнейшую оценочную подзадачи;
идея всеобщей погрешности как меры неточности, обобщающей нечёткую приближённость, с дополнительной косвенной оценкой их и меры несовместности противоречивой задачи;
идея окрестности и запаса произвольного множества относительно допускаемого множества;
идея общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных;
идеи всеобщего запаса (меры надёжности точности суперпсевдорешения как всеобщей погрешности противоречащего, как её противоположности при неточности) с непрерывными всеобщей логикой и иерархиями псевдоправильности, псевдоточности и псевдорешений;
идеи принципиальной самопогрешности любых физической величины и реального объекта;
идея исправления погрешностей усреднения при измерениях неоднородных распределений;
идея выравнивания частных погрешностей отношений общей математической задачи;
идея уравновешивания отношений общей математической задачи между собой;
идея нормального взвешивания данных для опоры именно на лучшие из них при учёте всех;
идеи иерархичности типов схем нагружения тела и существования основного типа, алгебраические суммы схем которого исчерпывают общий тип;
идея обобщения полиномиальных методов общим (полу)степенным методом с решениями в (полу)степенных рядах с учётом полной линейной независимости степенных функций;
идеи плоско точных (на плоских основаниях) неплоско приближённых (на цилиндрических поверхностях) граничных условий сплошного и кольцевого трёхмерных цилиндрических тел;
идея взятия сдвигового напряжения функцией напряжений для общего интегрального метода;
идея многовариантности методов минимизации среднеквадратично, минимаксами модулей и коллокационно невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов тела;
идея устранения таких минимизированных невязок сопряжения аналитических решений;
идея кратного снижения максимума рабочих расфокусировок изображений подводных объектов предварительной (противоположной средней рабочей) расфокусировкой системы;
идея линейных увеличений радиального натяга на торцевых участках проскальзывания слоёв составного цилиндра конечной длины для равномерности их контактного давления и для равнопрочности вдоль оси с учётом трёхмерных процессов тепловой сборки и запрессовки;
идея закономерного единства критериев предельных состояний (и критериев прочности) для различных материалов и условий нагружения как всеобщих прочностных законов природы;
идея закономерности, инвариантности, самопредельности и самоопасности безразмерного всеобщего напряжения с синхронным скалярным приведением размерного главного напряжения делением его функции на модуль функции одноосных пределов в том же направлении, в частности делением на модуль одноосного предела тех же направления и знака, в той же точке того же тела при прочих равных условиях нагружения;
идея постоянного векторного приведения к постоянному векторному всеобщему напряжению (с ординатой как амплитудой равноопасного циклического напряжения с таким же или наименее уклоняющимся средним напряжением цикла как абсциссой) напряжённого процесса (переменной программы) главного напряжения за время нагружения;
идея минус-остепенения для исправления и обобщения критериев предельных состояний;
идея обобщения всеобщих прочностных законов природы с предельных состояний также на непредельные с запасом прочности при сложном нагружении как функцией индивидуальных запасов взаимно независимых нагрузок с учётом их наиболее опасного сочетания;

идея существования общих аналитических методов решения задач прочности для именно существенно трёхмерных осесимметричных упругих тел при типовых схемах их нагружения;
идеи существования обобщённого аналитического метода решения каждого класса задач прочности и аналитического метода решения каждой задачи прочности с инженерной точностью и простотой, соответствующей мере сложности граничных условий задач;
идея существования функционально допустимого и технологически осуществимого рационального управления прочностью и другими характеристиками каждой конструкции.
Научная новизна настоящей докторской диссертации состоит в следующем:
созданы и развиты иерархические математическая, метрологическая, оптико-механическая и прочностная системы принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов как теоретический фундамент теорий (с открытием и обоснованием систем принципиально новых явлений и законов) и простых замкнутых общих аналитических методов рациональных комплексных инженерных исследования, проектирования и управления системами напряжённо-деформированных состояний и процессов, жёсткости, прочности и оптики трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов техники высоких давлений, в т. ч. с концентраторами напряжений, трением, сцеплением и проскальзыванием;
созданы основы теории количественных множеств с учётом любых количеств элементов для всеобщих законов сохранения, моделирования любых совокупностей и для теории и общих методов последовательного выравнивания частных погрешностей отношений общей математической задачи между собой с обобщением и развитием теории множеств Кантора;
создана теория общих математических задач как количественных множеств функциональных отношений (уравнений, неравенств) с операторами над искомыми функциями аргументов;
созданы теории полной линейности оператора и полных линейных независимости и зависимости даже для бесконечной линейной комбинации, при которых из её аннулирования следует или не обязано следовать соответственно аннулирование всех её коэффициентов;
создана теория собственной совокупности видов (классов), в частности собственного вида (класса), функций для множества операторов (обобщение собственной функции оператора);
поставлена и решена проблема необходимости бигармоничности функции напряжений Лява;
создана полная линейно-комбинационная методология, в т. ч. с общим (полу)степенным методом решения общих математических задач, в т. ч. гармонического и бигармонического уравнений в (полу)степенных рядах как собственных классах функций для операторов, и открыто явление ограничения сверху степени функции напряжений граничными условиями;
создана целочастичная (парциальная) методология с разбиением системы функциональных отношений задачи на разрешающую подсистему простейших отношений и на остаточную оценочную подсистему сложнейших отношений, в т. ч. для общего интегрального метода;
создана общая теория дополнительных альтернативных новых действий (минус-умножения и минус-деления, минус-остепенения и минус-укоренения) с обобщением степенных, показательных, степенно-показательных функций на отрицательные основания для критериев прочности ввиду повышения прочности при равном трёхосном сжатии;
созданы общие теории неточных псевдорешений, наилучших квазирешений и приближений, исправляющей относительную погрешность всеобщей погрешности как меры неточности, обобщающей нечёткую приближённость, с дополнительной косвенной оценкой качества приближений, меры несовместности противоречивой задачи и переопределённой с данными;
создана общая теория запаса с общей методологией всеобщего запаса (обобщением всеобщей погрешности впервые измеряющего надёжность точности для суперпсевдорешения задачи), мультипликативной и аддитивной методологиями общего запаса как функции индивидуальных запасов множеств значений независимых переменных в гильбертовых пространствах, с непрерывными всеобщей логикой и иерархиями псевдоправильности, псевдоточности и псевдорешений и с открытием философского закона перехода анализа как общенаучного метода от качественного различения к количественному измерению различий;
созданы общие теории и методы измерения физических величин, оценки и исправления погрешностей усреднения при измерениях неоднородных распределений, в частности:

теория и открытие явления самопогрешности физических величины и объекта с невязкой сопряжения реального объекта и его идеальной расчётной схемы по общей теории невязок сопряжения; теория погрешностей усреднения при измерениях существенно неоднородных распределений; теория обращения линейного интегрального оператора усреднения с решением проблем существования в случае дифференцируемости образа, единственности обращения с точностью до функций, для которых база измерительного прибора является периодом с нулевым средним интегральным их значением на периоде, и точного или приближённого построения такого обращения; теория и методы определения коэффициентов мультипликации, дающих наибольшее значение измеряемой неоднородно распределённой величины по измеренным её значениям, которые искажены удалением, запаздыванием и усреднением ввиду инертности и конечных размеров измерительного элемента; теория и методы определения коэффициентов мультипликации при электротензометрии, в т. ч. мест концентрации напряжений в двумерных расчётных схемах и трёхмерных реальных объектах;
созданы общие теории и методы наилучших аналитических приближений к дискретным экспериментальным данным с их разбросом при опоре на лучшие из них и взвешенном учёте всех данных без исключения выбросов, в т. ч. для методов экспериментальных исследований напряжённо-деформированных состояний и прочности конструкций при высоких давлениях, в частности: общая теория анализа приемлемости методов обработки данных (доказаны крайняя узость областей пригодности абсолютной и относительной погрешностей и метода наименьших квадратов, их принципиальные изъяны и пороки вплоть до неинвариантности, нелогичности, двусмысленности, субъективизма исключения выбросов, опоры на худшие сохраняемые данные ввиду ничтожности вклада наилучших данных в сумму квадратов отклонений, минимизируемую этим методом, и даже извращений действительности); теория и общие методы наименьших нормально взвешенных степеней с опорой на всеобщую погрешность (метод наименьших квадратов опирается на абсолютную погрешность); теории и общие методы выравнивания отношений общей математической задачи, их погрешностей; теория и общие методы взвешивания данных для опоры на лучшие из них при учёте всех данных без изъятия выбросов и при верном использовании метода наименьших квадратов; теория и общие методы аналитических приближений полной кривой усталости Вёлера;
создана теория открытых закономерных инвариантных самопредельных самоопасных безразмерных всеобщих напряжений с синхронным скалярным приведением размерного главного напряжения делением его функции на модуль функции одноосных пределов в том же направлении, в частности делением на модуль одноосного предела тех же направления и знака, в той же точке того же тела при прочих равных условиях нагружения;
создана теория открытых иерархичности типов схем осесимметричного (без объёмных сил и кручения) нагружения трёхмерного цилиндрического тела и существования и общего метода конструктивного определения основного типа схем (с одним свободным торцом), алгебраические суммы схем которого исчерпывают общий тип, а в технике высоких давлений являются общим тип схем с равномерным давлением на боковую поверхность и ступенчатыми давлениями на торцы и основным – с равномерными давлениями на боковую поверхность, на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания;
созданы общие (полу)степенной и интегральный аналитические методы макроэлементов как (полу)степенная и интегральная модификации аналитической методологии макроэлементов для впервые решаемых нетривиальных задач механики, прочности и оптики трёхмерных тел;
созданы теории и аналитические методы среднеквадратичной, обеспечивающей минимакс модуля и коллокационной минимизации и устранения минимизированных невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения;
созданы теории, методологии и аналитические методы решения задач о напряжённо-деформированном состоянии при осесимметричном изгибе линейно упругого трёхмерного сплошного цилиндрического тела равномерным давлением на одно основание с возможным равномерным давлением на боковую поверхность при жёстком защемлении боковой

поверхности, свободном опирании по краю или по окружности меньшего радиуса или при равномерном противодавлении на кольцевую периферическую часть другого основания;
созданы теории принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных процессов составного цилиндра конечной длины при его тепловой сборке и запрессовке;
созданы теории комплексной оптимизации механических, прочностных и оптических свойств несущих и светопрозрачных трёхмерных элементов и систем разных конфигураций, в том числе с концентраторами напряжений, трением, сцеплением и проскальзыванием, метод и алгоритм комплексной оптимизации существенно трёхмерных сплошных цилиндрических светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений;
создана общая теория прочности материалов с открытием первых в истории всеобщих прочностных законов природы во всеобщих напряжениях, в том числе путём исправляющего и обобщающего приведения к ним известных частных критериев предельных состояний и прочности, в частности: теории прочности постоянно нагруженных изотропных или анизотропных материалов, одинаково или различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, и общие методы приведения напряжений к скалярным всеобщим напряжениям для таких материалов; теория прочности переменно (с вращениями главных направлений напряжённого состояния в точке во времени) нагруженных любых материалов и общие методы векторного приведения к постоянному векторному всеобщему напряжению (с ординатой как амплитудой равноопасного циклического напряжения с таким же или наименее уклоняющимся средним напряжением цикла как абсциссой) напряжённого процесса (переменной программы) главного напряжения за время нагружения при постоянной нумерации главных напряжений; методология (теория и общие методы) исправления критериев предельных состояний, в т. ч. для учёта упрочняющего влияния трёхмерного равноосного сжатия, для учёта подлинных соотношений пределов прочности материала при различных видах напряжённого состояния и для верного учёта алгебраически наибольших напряжений и деформаций; методологии (теории и общие методы) универсализации прочностных данных и критериев предельных состояний; методология (теория и общие методы) открытия всеобщих прочностных законов природы и их иерархий;
открыта система явлений и законов запасов и создана общая теория прочности объектов с обобщениями всеобщих прочностных законов природы на непредельные состояния с запасом прочности при сложном нагружении: теории равносильной множественности и выбора критерия предельных состояний; теории мультипликативного и аддитивного запасов непредельного состояния; теория частных запасов, выражаемых через единый для них запас, для опаснейшего сочетания независимых нагрузок при сложном нагружении; теория выбора подходящего для задачи прочности объекта всеобщего критерия предельных состояний как всеобщего прочностного закона природы; теории прочности трёхмерных тел различных форм, в т. ч. с концентраторами напряжений, трением, сцеплением и проскальзыванием;
показано, что для существования точного решения упругой задачи необходима и достаточна согласованность её граничных условий, установлена предельная роль линейного обобщения задачи Ламе и предложено дальнейшее обобщение её решения в приближённой форме;
создан метод неопределённых граничных условий в напряжениях для смешанных упругих задач и показано, что в задаче об опёртом по краю трёхмерном цилиндрическом теле под равномерным давлением на одно основание радиальное и окружное напряжения достаточно точно определяются теорией пластин в отличие от теории плит, а равномерное сжатие торцов усечённого конического тела сопровождается его осесимметричным изгибом;
открыты и обоснованы системы принципиально новых явлений и законов деформирования и оптики, прочности и разрушения именно существенно трёхмерных цилиндрических тел, в частности составных цилиндров именно конечной длины и светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений, а также запаса и всеобщих явлений и законов;
обобщены и существенно уточнены созданными общими методами расчёты трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений, по сравнению с расчётами по теории пластин и по теории плит;

обоснована достоверность созданных общих теорий, методологий и методов исследований напряжённо-деформированных состояний, жёсткости и оптики, прочности и разрушения трёхмерных цилиндрических тел аналитическим и численным сопоставлением с известными аналитическими методами и сравнением результатов использования созданных и классических и других известных аналитических, численных и экспериментальных методов;

для тепловой сборки составного цилиндра конечной длины открыто и обосновано явление существования её критического значения, превышение которого ведёт к появлению между симметричными торцевыми участками осевого проскальзывания слоёв с экспоненциальным ростом контактного давления и модулей осевых напряжений к срединной плоскости также срединного участка взаимного осевого сцепления слоёв с равномерностью этих величин;

для запрессовки составного цилиндра открыты и обоснованы явление конечности усилия запрессовки при неограниченном увеличении конечной длины цилиндра и явления общей асимметрии и частной симметрии участков осевого проскальзывания, разделённых срединным участком осевого сцепления слоёв на половине длины цилиндра при равенстве коэффициентов поперечной деформации Пуассона материалов слоёв, с экспоненциальными изменениями контактного давления и осевых напряжений на всех этих участках;

обобщены установленные А. В. Гадолиным условия наилучшей сборки составного цилиндра при плоском напряжённом состоянии и статическом нагружении на существенно трёхмерный случай конечной длины цилиндра при его циклическом нагружении внутренним давлением;

открыты явления и созданы методы иерархизации систем неопределённостей участков сцепления и проскальзывания и критических значений в осесимметричной термоупругой контактной задаче с трением для уплотнений с заниженными разгрузочными поясками;

созданы общие методы (не)малых отверстий и сосредоточенного сопряжённого усреднения с теорией циклической прочности при концентрации напряжений циклически симметричной системой отверстий для ограничителя и открыто явление выравнивания всех эквивалентных напряжений на поверхностях отверстий при центральном отверстии наилучшего радиуса;

предложены и обоснованы новые рациональные конструкции сосудов высокого давления, иллюминаторов, съёмочного устройства, уплотнений и гермовводов, а также способ испытания, защищённые авторскими свидетельствами на изобретения.

<u>Обоснованность</u> настоящей докторской диссертации обеспечена опорой её общих теорий, методологий и методов на общепринятые всеобщие и общенаучные методы познания, принципы, допущения, теории, методологии и методы математики, метрологии, механики деформируемого твёрдого тела (с теориями упругости и пластичности, оболочек, пластин и плит), прочности (с теориями и критериями статической и циклической прочности) и теории оптических систем, сопоставлениями многовариантных формул и результатов между собой и с классическими и другими известными формулами, численными и опытными данными.

<u>Достоверность полученных экспериментальных данных</u> обеспечивается применением современных оборудования и измерительной техники, анализом точности измерений, приемлемой математической обработкой, достижением согласованности результатов, а также сопоставлением полученных экспериментальных данных с другими данными.

<u>Практическая ценность</u> данной докторской диссертации состоит в создании теоретического фундамента для разработки теорий рационального проектирования и инженерных методов расчёта напряжённо-деформированных состояний и прочности типовых трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов техники высоких давлений. Для экспериментальных исследований полезны совершенствование их средств и общие теории, методологии и методы обработки данных, в том числе общий метод исправления погрешностей усреднения при измерениях неоднородных распределений для электротензометрии в местах концентрации напряжений. Все расчётные формулы доведены до уровня практического использования, максимально просты и в принципе не требуют использования компьютеров.

Результаты исследований иллюминаторов внедрены в Научно-исследовательском и проектном институте геофизических методов разведки океана ПО «Южморгеология» и в Ленинградском институте точной механики и оптики и позволили усовершенствовать проектирование и расчёт оптических систем для высоких давлений, повысить качество изображения подводных объектов, увеличить достоверность получаемой информации и сократить время на проведение работ по дешифрированию экспонированного фотоматериала. Сосуды высокого давления, плунжеры и другие конструкции, проектные и поверочные расчёты прочности которых автор выполнил в ходе и с использованием результатов обобщения аналитических методов решения задач прочности именно существенно трёхмерных тел для типовых элементов конструкций в технике высоких давлений, внедрены в Институте проблем прочности АН Украины, в НИИ компрессорного машиностроения, в НИИ атомного и энергетического насосостроения и во многих других организациях со значительным экономическим эффектом (данные отнесены в приложение диссертации).

Предмет защиты настоящей докторской диссертации

1. Созданная математическая система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, среди них общие теории количественных множеств; именно дополнительных новых действий; общих математических задач; бесконечных полных линейности операторов и линейной (не)зависимости; замкнутых собственных совокупностей классов функций для множеств операторов с общими решениями гармонического и бигармонического уравнений в степенных рядах (собственных классах функций); полная линейно-комбинационная и целочастичная (парциальная) методологии, общие интегральный и (полу)степенной методы решения общих систем функциональных уравнений.
2. Созданная метрологическая система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, среди них общие теории, методологии и методы измерения физических величин; оценки и исправления погрешностей усреднения при измерениях неоднородных распределений; псевдорешений и всеобщих погрешности и запаса и их оптимизации; наилучших аналитических приближений к дискретным экспериментальным данным с их разбросом при непременной опоре на лучшие из них и при нормально взвешенном учёте всех данных безотносительно нормальности их распределения и без исключения выбросов, в том числе для развития методов экспериментальных исследований.
3. Созданная оптико-механическая система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, среди них общие теории всеобщих напряжений; иерархичности типов схем нагружения; минимизации и устранения невязок сопряжения; осесимметричного изгиба равномерными давлениями и его влияния на оптические свойства существенно трёхмерных цилиндрических тел; трёхмерных напряжённо-деформированных процессов составного цилиндра конечной длины при тепловой сборке и запрессовке; комплексной оптимизации механических, прочностных и оптических свойств несущих и светопрозрачных трёхмерных элементов и систем разных форм, в том числе с трением, сцеплением, проскальзыванием и концентраторами напряжений; общие (полу)степенной и интегральный методы как модификации аналитической методологии макроэлементов.
4. Созданная прочностная система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, среди них общая теория прочности материалов с открытием первых всеобщих прочностных законов природы во всеобщих напряжениях, в том числе путём исправляющего и обобщающего приведения к ним известных частных критериев предельных состояний и прочности, и общая теория прочности объектов с открытием системы явлений и законов запасов и обобщениями всеобщих прочностных законов природы с предельных на непредельные состояния с запасом прочности при сложном нагружении как функцией индивидуальных запасов независимых нагрузок с учётом их наиболее опасного сочетания.
5. Система разработанных (приложением созданных математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем общих теорий, методологий и методов) принципиально новых общих аналитических методов расчёта напряжённо-деформированных состояний и процессов, прочности и оптики трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов конструкций в технике высоких давлений с установлением приемлемости этих методов аналитическими и численными сопоставлениями полученных формул и результатов с известными аналитическими решениями, численными и экспериментальными данными.

6. Система впервые решённых нетривиальных задач механики, оптики, прочности и герметичности трёхмерных тел из пластичных и хрупких материалов с открытием систем принципиально новых явлений и законов механики, оптики, прочности, запаса и разрушения, в том числе для типовых расчётных схем и реальных объектов техники высоких давлений с учётом концентраторов напряжений, трения и взаимных сцепления и проскальзывания.
7. Созданные теории рациональных комплексных проектирования существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов и управления их напряжённо-деформированными состояниями и процессами, прочностью и оптикой и новые эффективные конструкции для техники высоких давлений, в т. ч. защищённые авторскими свидетельствами на изобретения.

Апробация. Основные результаты исследований, обобщённых этой докторской диссертацией, докладывались и обсуждались на 30 Всесоюзных, межрегиональных и Международной научно-технических конференциях, в том числе Всесоюзном научно-техническом семинаре «Оптимизация конструкции и моделирование процессов высокого давления» (Сумы, 1978), Всесоюзной научно-технической конференции «Методы и средства тензометрии и её применение в народном хозяйстве» (Кишинёв, 1979), Семинаре-совещании «Проблемы оптимизации в машиностроении» (Харьков, 1982), Четвёртой Всесоюзной конференции по оптимальному управлению в механических системах (Москва, 1982), Третьем Всесоюзном симпозиуме по импульсным давлениям (Москва, 1983), Четвёртой Всесоюзной конференции «Проблемы научных исследований в области изучения и освоения Мирового океана» (Владивосток, 1983), Всесоюзной конференции «Теоретическая и прикладная оптика» (Ленинград, 1984), Пятой Всесоюзной конференции «Технические средства изучения и освоения океана» (Ленинград, 1985), Двенадцатой Всесоюзной научно-технической конференции «Конструкция и технология получения изделий из неметаллических материалов» (Москва, 1990). Полностью докладывалась и обсуждалась данная докторская диссертация на научном семинаре кафедры «Динамика и прочность машин» Харьковского политехнического института (1992, октябрь), Научно-техническом проблемном совете по статической прочности Института проблем машиностроения АН Украины (1992, октябрь), тематическом семинаре № 2 «Статическая прочность» Института проблем прочности АН Украины (1992, октябрь), научном семинаре Института проблем прочности АН Украины (1993, февраль), заседании Одесского Дома учёных (1993, апрель), научном семинаре кафедры деталей машин и теории механизмов и машин Одесского института инженеров морского флота (1993, апрель), научном семинаре кафедры математической физики Киевского государственного университета (1993, июнь), кафедре сопротивления материалов и динамики и прочности машин Киевского политехнического института (1993, июнь), научном семинаре отдела термопластичности Института механики АН Украины (1993, июнь), научном семинаре Института проблем прочности АН Украины (1993, июнь).

Основное содержание настоящей докторской диссертации опубликовано в трёх научных монографиях (одна на английском языке), в 72 научных статьях (семь на английском языке) и тезисах докладов. Её разработки защищены 30 авторскими свидетельствами на изобретения.

Структура и содержание. Настоящая докторская диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка использованных научных трудов со ссылками в тексте и приложений с системой дальнейших математических, метрологических, механических и прочностных обобщений, справками о практическом использовании и актами внедрения основных результатов настоящей докторской диссертации.

## 1. Известные методы проектирования в технике высоких давлений

В первой главе выполнен аналитический обзор известных методов проектирования и решения задач прочности типовых несущих и светопрозрачных элементов конструкций в технике высоких давлений как преимущественно трёхмерных тел вращения.

Светопрозрачные элементы (из неорганического или органического стекла) иллюминаторов для освещения или наблюдения области высокого давления с высокими требованиями к

прочности, герметичности и оптике как слабейшие звенья сосудов высокого давления определяют их прочность и влекут оптические искажения, а для универсальности исправляющих оптических систем должны иметь плоскопараллельные оптические поверхности. Под высоким давлением светопрозрачный элемент деформируется, прогибаясь в сторону низкого давления и приближая изображение к задней поверхности объектива на величину продольной расфокусировки. Допустима продольная расфокусировка не более 5 мкм. Уменьшение прогибов и оптических искажений достигается заменой низкомодульного и мутнеющего при высоких нагрузках органического стекла неорганическим стеклом. Для выбора конструктивных параметров оптической системы необходимы именно аналитические зависимости между значениями искажений и конструктивными параметрами системы. Нет известных аналитических методов расчёта прочности, жёсткости и оптики существенно трёхмерных тел, в частности светопрозрачных элементов иллюминаторов высокого давления.
Для рационального проектирования техники высоких давлений необходимы простые именно аналитические методы комплексного решения задач механики, прочности и оптики типовых трёхмерных цилиндрических несущих и светопрозрачных элементов под равномерными давлениями на боковые поверхности и ступенчатыми давлениями на основания с незаменимой взаимной проверкой численными и экспериментальными методами.
Применяются для пластичных материалов третья теория прочности (критерий наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска и четвёртая теория прочности (критерий удельной энергии формоизменения, или критерий октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки, а для хрупких материалов первая теория прочности (критерий наибольших нормальных напряжений) и критерий Кулона–Мора. Наилучшие результаты даёт общая теория Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева о совместном влиянии сопротивлений материала нормальным и сдвиговым нагрузкам на наступление предельного его состояния.
Имеет место взаимно однозначное соответствие критерия предельных состояний и критерия прочности (предельных и допредельных состояний), и они могут условно объединяться.
Решение задачи многоцикловой усталостной прочности может быть получено по линейным приближениям Гудмена и Зодерберга диаграммы усталостной прочности Хэя.
Точны трёхмерные упругие решения (формулы) Ламе для полой сферы и полого цилиндра. Равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности максимально на внутренней поверхности цилиндра и резко убывает к внешней поверхности. Неэффективно увеличение относительной толстостенности цилиндра сверх трёхкратной, и дальнейшее упрочнение (повышение несущей способности) цилиндра достигается не утолщением, а конструктивными и/или технологическими способами создания остаточных напряжений в цилиндре – сжимающих во внутренних слоях и растягивающих во внешних слоях. При высоких давлениях несущественна весомость рабочих сред, и реже применяется линейное обобщение задачи Ламе. Контактная задача А. В. Гадолина при плоском напряжённом состоянии для торцов или при бесконечном уменьшении коэффициента трения или отношения длины к радиусу сопряжения с обобщением Х. Л. Пью для разных материалов сопрягает решения Ламе для внутреннего и внешнего слоёв составного цилиндра с натягом для внутреннего давления и не учитывает осевых напряжений и осевого сцепления слоёв.
В. Д. Лубенец учёл влияние осевых напряжений при тепловой сборке составного цилиндра неограниченной длины (плоская деформация) со сцеплением слоёв. Принято равенство осевых деформаций слоёв при сборке и нагружении давлением и логарифмическое температурное поле. И в других известных решениях не ставятся задачи для торцевых зон, альтернативной технологии сборки (запрессовки) и циклического нагружения.
Увеличение числа слоёв с одного до двух для решения задачи прочности важно качественно, а дальнейшее – лишь количественно, так как сводится к последовательности задач для двухслойных цилиндров, анализом которых можно ограничиться без потери общности.
Известно технологическое упрочнение цилиндров самоскреплением (автофретированием).
Типичный концентратор напряжений в цилиндре – поперечное отверстие. При радиальной его ориентации и малости его радиуса относительно внутреннего радиуса цилиндра Дж.

Моррисон наложением (суперпозицией) решений Ламе и Кирша для одноосного растяжения неограниченной пластины с круглым отверстием установил коэффициент 2.5 концентрации равносильного (эквивалентного) напряжения по третьей теории прочности.

В задачах прочности несущих и светопрозрачных элементов техники высоких давлений используются сопротивление материалов, теории оболочек, круглых пластин и плит радиусом a и толщиной h, опёртых или защемлённых по боковой поверхности, под равномерным давлением на одно основание. Менее известны решения для опоры пластины по концентричной окружности меньшего радиуса или при равномерном противодавлении на кольцевую периферическую часть другого основания. С. А. Алексеев вскрыл физические основы погрешностей теории пластин с гипотезами прямых нормалей. Количественный учёт сдвига нормалей выполнили С. П. Тимошенко и С. Войновский-Кригер. Эффект искривления нормалей мал при коэффициенте поперечной деформации Пуассона $\mu \ll 1$. Длины нормалей изменяются по обобщённому закону Гука. В осесимметричной упругой задаче без объёмных сил и кручения бигармоничность функции напряжений Лява L(r, z) достаточна для точного выполнения уравнений равновесия и совместности, но проблематично, необходима ли для этого. Возникает проблема принципиальной полноты класса решений функциями Лява. Радиальное $u_r(r, z)$ и осевое $u_z(r, z)$ перемещения, радиальное $\sigma_r(r, z)$, тангенциальное (окружное) $\sigma_t(r, z)$, осевое $\sigma_z(r, z)$ и сдвиговое $\tau_{rz}(r, z)$ напряжения определяются однозначно через функцию напряжений Лява L(r, z) с помощью линейных дифференциальных операторов. С. П. Тимошенко и Дж. Гудьер в задаче изгиба равномерным давлением круглой плиты, свободно опёртой по краю, индуктивно использовали шестую степень функции напряжений Лява в виде дающего неустранимую невязку $\sigma_r(a, z)$ наложения (суперпозиции) нескольких элементарных решений с переходом к полярной системе координат в полиномах Лежандра. Удовлетворяются граничные условия на обоих торцах (плоских основаниях). Аннулируются средняя невязка $\sigma_r(a, z)$ и изгибающий момент на краю. Степень L(r, z) выше шестой решает задачи с более сложными распределениями нагрузок и вообще граничными условиями. Не ясна возможность уточнить решение шестой или повышенной степенью функции напряжений Лява L(r, z). С. П. Тимошенко и А. И. Лурье оценили поправки к теории тонких пластин в формулах для осевого перемещения $u_z(0, 0)$ и радиального напряжения $\sigma_r(0, 0)$ и сделали вывод о малых погрешностях теории тонких пластин при $h/(2a) \leq 0.1$. С. А. Алексеев оценил погрешности теории тонких пластин. Поправки составляют для прогиба 13 % при h/a = 1/5 и 53 % при h/a = 2/5; для наибольшего растягивающего напряжения 12 % при h/a = 2/5; для наибольшего сжимающего напряжения 2 % при h/a = 2/5. При относительной толщине h/a не более 2/5 определяются достаточно надёжно напряжения, но не прогибы.

Отсутствует известное достаточно полное изложение решений для изгиба равномерным давлением на одно основание круглой плиты, свободно опёртой или защемлённой по краю (боковой поверхности). Не оценивается погрешность в удовлетворении граничных условий на боковой поверхности. Не рассматриваются различные пути приближённого выполнения этих условий. Не рассматриваются плиты с толщиной порядка диаметра, характерной для светопрозрачных элементов при высоких давлениях. Решения с бесконечными рядами цилиндрических функций Бесселя неудобны для практики. Не рассматривается общее представление функции Лява для лучшего из элементарных решений задачи об именно существенно трёхмерном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе.

Важно, что в известных решениях одностороннее равномерное давление на торец (плоское основание) уравновешивается сдвиговым напряжением на боковой поверхности сплошного цилиндрического элемента. Для жёстко защемлённого края это так. Для свободно опёртого края давление на торец уравновешивается контактным давлением опоры на другой торец. Если самый край контактирует с узкой опорой, то несущая способность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела мала вследствие разрушения края.

Реальны два варианта опирания. В первом узкая зона контакта светопрозрачного элемента с опорой полезна для аннулирования прогиба центра сплошного цилиндрического элемента за счёт прогиба края, а для этого зона контакта должна быть удалена от края на расстояние, подлежащее определению. Отсутствие прогиба центра светопрозрачного элемента полезно тем, что при давлении практически не изменяются оптические свойства светопрозрачного элемента и не ухудшается качество изображения. Второй вариант опирания имеет целью снижение контактного давления опоры на сплошной цилиндрический элемент путём увеличения ширины контакта. В этом случае с опорой контактирует кольцевая часть торца сплошного цилиндрического элемента от края до центрального круга – светового сечения. В обоих случаях известны решения теории тонких пластин, но не теории толстых плит.

Методически интересны работы Б. Г. Галёркина, С. Г. Гутмана, А. И. Лурье, В. К. Прокопова, В. Т. Гринченко и А. Ф. Улитко, В. И. Блоха, М. А. Колтунова, Ю. Н. Васильева и В. А. Черных, В. Г. Рекача, Л. Г. Доннелла. В оптике плоских светопрозрачных элементов их прогиб если и учитывается, то как свободно опёртых по краю пластин. В воздухе такой элемент не влияет на изображение бесконечно удалённых предметов, а при конечном не слишком малом удалении влияет слабо. Вода увеличивает на треть масштаб изображения и уменьшает на треть поле зрения, но считается, что стеклоэлемент вносит несущественные изменения, как и в воздухе. Перемещения и напряжения в светопрозрачном элементе иллюминатора по методу Б. Н. Жемочкина в теории плит, лежащих на упругом основании, исследовал В. Ф. Клёнов. Его методика расчёта не рассматривает иллюминатор комплексно с учётом оптических свойств, уступает теории пластин в простоте, не учитывает трёхмерности светопрозрачных элементов. Однако и для них справедлив вывод о малом влиянии напряжённого состояния в стеклоэлементах на показатели преломления, поскольку напряжения определяются с меньшими погрешностями, чем перемещения, а главное, потому что изменения этих показателей преломления на три порядка меньше, чем сами показатели.

Для задачи жёсткости светопрозрачного элемента нужны эти перемещения его оснований. В задаче прочности аналитическими зависимостями напряжений от параметров геометрии и нагружения определяются теорией прочности наибольшее равносильное (эквивалентное) напряжение и коэффициент запаса по предельному одноосному напряжению.

Из экспериментальных методов исследований напряжённо-деформированных состояний в технике высоких давлений используется электротензометрия без учёта погрешностей усреднения по площади измерительной решётки тензорезистора и её удаления от точки с наибольшей деформацией. Более того, погрешности измерений неоднородных распределений в метрологии и в теории погрешностей, насколько известно, остаются вне поля зрения.

В итоге наличные методы решения задач прочности недостаточны для рационального проектирования в технике высоких давлений и нуждаются в дополнениях приемлемыми и достаточно простыми аналитическими методами расчёта напряжений и перемещений в несущих и светопрозрачных элементах с непременным учётом существенной трёхмерности.

## 2. Создание системы общих теорий, методологий и методов аналитического решения общих систем функциональных уравнений как общих задач математики, метрологии, механики и прочности

Общие математические теории и методологии синергии функциональных анализа и синтеза теорий, методологий и методов открыли нечёткость приближённости и целые системы изъянов абсолютной и относительной погрешностей и метода наименьших квадратов.

Абсолютная погрешность формального (условного, независимого от истинности, что обозначается знаком вопроса, в данном случае после знака равенства) приравнивания a =? b недостаточна для выражения и оценивания качества приближения и не инвариантна, так как при равносильном умножении формального приравнивания на ненулевое число умножается на его абсолютную величину: $\Delta_{1000 =? 999} = \Delta_{1 =? 0} = 1$, $\Delta_{10=?0} = 10$.

Относительная погрешность нелогична, определена лишь для двухэлементного формального приравнивания, для него двузначна (двусмысленна), вопреки замыслу может превышать единицу и быть бесконечной и вообще неопределённой (в последних двух примерах ниже):

$\delta_{a =? b,\, a} = ||a - b||/||a|| \neq ||a - b||/||b|| = \delta_{a=?b,\, b}$, $\delta_{1=?0,\, 0} = 1/0 = \infty$, $\delta_{1=?-1,\, 1} = \delta_{1=?-1,\, -1} = 2$, $\delta_{100 - 99 =? 0}?$, $\delta_{1-2+3-4 =? -1}?$

Метод наименьших квадратов имеет систему основополагающих принципиальных изъянов и пороков и крайне узкие области применимости и тем более приемлемости и пригодности:
1) не пригоден при не совпадающих физических размерностях (единицах) решаемой задачи;
2) не инвариантен, меняет не проверяемый итог при равносильных преобразованиях задачи:
$x = 1 \wedge x = 2 \to x = 3/2$; $10x = 10 \wedge x = 2 \to x = 102/101$; $x = 1 \wedge 10x = 20 \to x = 201/101$;
3) необоснованно полагается, как и математическая статистика, на абсолютную погрешность и вторую степень усреднения без улучшения получаемого не оцениваемого псевдорешения;
4) минимизирует сумму квадратов отклонений, в т. ч. разностей частей уравнений системы, с опорой на наихудшие данные с преимущественным вкладом, а не на наилучшие данные с их ничтожным вкладом в эту сумму, часто ведёт к неприемлемости, извращениям и парадоксам: приближение $y = kx$ точек (1, 1), (10, 15) даёт парадоксальное сочетание большей абсолютной погрешности $\Delta_{(1, 1)}$ приближения малых данных и меньшей абсолютной погрешности $\Delta_{(10, 15)}$ приближения больших данных: $k = 151/101$, $\Delta_{(1, 1)} = 51/101$, $\Delta_{(10, 15)} = 5/101$.

Иерархия единства, разделения (анализа) и соединения (синтеза) общих теорий, методологий и методов постановки и решения общей математической задачи является следующей:
1) искомая предметность; 2) соотносительность; 3) функциональность; 4) множественность и систематичность; 5) однородность и разнородность; 6) параметризация и специализация;
7) полная (возможно, бесконечная) линейная комбинационность и целочастичность (парциальность); 8) степенность и раздвоенность; 9) аналитическая макроэлементность.
Продолжают эту иерархию частные типы задач и отдельные задачи и соответствующие общие и частные теории, методологии и методы их решения.

Для цели и задач настоящей докторской диссертации особо важно развить созданные полную линейно-комбинационную и целочастичную (парциальную) методологии, следом общие (полу)степенной и интегральный методы решения общих систем функциональных уравнений, аналитическую методологию макроэлементов и как её модификации общие (полу)степенной и интегральный аналитические методы макроэлементов.

Обобщением интегральных и дифференциальных (обыкновенных, в частных производных) уравнений, их так называемых систем (на самом деле множеств) и краевых задач с начальными и/или граничными условиями создана теория общих математических задач как множеств функциональных отношений, в частности функциональных уравнений

$$R_\lambda\{L_\lambda[_{\varphi\in\Phi} f_\varphi[_{\omega\in\Omega} z_\omega]]\} \ (\lambda \in \Lambda), \ L_\lambda[_{\varphi\in\Phi} f_\varphi[_{\omega\in\Omega} z_\omega]] = 0 \ (\lambda \in \Lambda),$$

где $R_\lambda$ – индексированные заданные отношения; $L_\lambda$ – индексированные заданные операторы; $f_\varphi$ – индексированные искомые функции; $z_\omega$ – индексированные заданные независимые переменные; $\Lambda$, $\Phi$, $\Omega$ – множества индексов $\lambda$, $\varphi$, $\omega$ соответственно; $[_{\omega\in\Omega} z_\omega]$ – совокупность индексированных элементов, в частности аргументов неизвестных функций.

Создана теория собственной совокупности видов (классов), в частности собственного вида (класса), функций для множества операторов. Если все функции (прообразы) и все значения каждого из операторов над этими функциями (образы) представимы единой совокупностью видов (классов) функций, множество операторов не выводит за её пределы, то множество операторов называется замкнутым относительно этой единой совокупности видов (классов) функций, она – собственной для множества операторов (глубокое обобщение неподвижной точки отображения); при единственности уравнения, оператора и функции собственная совокупность видов (классов) сводится к собственному виду (классу) функций для оператора, каждая из которых (прообраз) преобразуется им в функцию (образ) того же вида (класса), не обязательно пропорциональную прообразу, так что собственным видом (классом) функций для оператора глубоко обобщается и собственная функция для оператора. Главное, в отличие от собственных функций, ортонормированных базисов и неортогональных фундаментальных решений, собственные виды (классы) функций для многих линейных операторов очевидны и дают именно общие решения систем функциональных уравнений.

Полная линейно-комбинационная методология предусматривает явное определение общего решения системы функциональных уравнений в совокупности классов искомых функций, собственной для системы операторов, каждый из которых принимает значения из своего класса конечных или бесконечных линейных комбинаций вполне линейно независимых координатных функций (то есть даже бесконечная линейная комбинация обращается в нуль только при аннулировании всех её коэффициентов). Каждое из $n_\Lambda$ уравнений сводится к своей подсистеме условий аннулирования линейной комбинации – значения оператора уравнения.

Если класс каждой искомой функции $f_\varphi$ является параметрическим ($a_\alpha$ – числовой параметр с индексом α, A – множество индексов α) $F_\varphi\{[_{\omega\in\Omega}\ z_\omega],\ [_{\alpha\in A}\ a_\alpha]\}$, то система функциональных уравнений даёт систему уравнений относительно совокупности числовых параметров. Если параметрический класс каждой искомой функции есть множество конечных или бесконечных линейных комбинаций своих вполне линейно независимых координатных функций, а все операторы вполне линейны относительно преобразуемых линейных комбинаций, то получаемая система уравнений относительно коэффициентов совокупности линейных комбинаций из классов искомых функций линейна. Если система координатных функций каждого из этих классов базисна, то получаемое решение исчерпывающе, а если она полна, то может быть получено приближённое решение с любой наперёд заданной точностью в виде совокупности конечных линейных комбинаций координатных функций из этих классов.

Все различные произведения степеней координат с целыми показателями образуют вполне линейно независимую систему. Если класс степенных рядов является собственным классом функций для совокупности операторов системы функциональных уравнений, то полная линейно-комбинационная методология даёт как свой частный случай общий степенной метод решения системы функциональных уравнений для достижения впервые именно общих решений гармонического и бигармонического уравнений в степенных рядах.

В трёхмерной упругой задаче для точного выполнения всех уравнений равновесия и совместности деформаций достаточна гармоничность трёх функций напряжений Папковича-Нейбера. В осесимметричной задаче теории упругости без объёмных сил и кручения в цилиндрической системе координат для точного выполнения всех уравнений равновесия и совместности деформаций достаточна бигармоничность функции напряжений Лява.

Если искомые функции имеют общую область определения, которую целесообразно рассмотреть или как единый макроэлемент, или как соединение макроэлементов, то общий (полу)степенной метод решения общих систем функциональных уравнений даёт как свой частный случай общий (полу)степенной аналитический метод макроэлементов.

Целочастичная (парциальная) методология в самом общем виде разбивает решаемую задачу на различно используемые части (подзадачи), в частности предмет на подпредметы, систему на подсистемы, множество на подмножества, систему или множество отношений, например уравнений или неравенств, на подсистемы или подмножества соответствующих отношений, в том числе функциональных, в которых искомыми неизвестными являются функции. Целочастичная (парциальная) методология разбивает систему функциональных уравнений на различно используемые подсистемы функциональных уравнений. Возможно и сочетание целочастичной (парциальной) методологии с полной линейно-комбинационной методологией, используемой для явного отыскания аналитического решения некоторых из тех подзадач, на которые целочастичная (парциальная) методология разбивает задачу.

Если целочастичная (парциальная) методология разбивает решаемую задачу именно на две различно используемые части (подзадачи), одна из которых используется как разрешающая, а другая часть – как оценивающая (оценочная), то целочастичная (парциальная) методология даёт как свой частный случай общий интегральный (разрешающе-оценивающий) метод.

Общий интегральный метод для системы функциональных уравнений заключается в её разбиении на две подсистемы. Первая, разрешающая подсистема наиболее полно включает простые уравнения и даёт явное решение подсистемы как псевдорешение (частичное решение) системы. Вторая, оценочная подсистема (в отличие от поэтапных подходов) не влияет на псевдорешение и лишь оценивает его погрешность. Неоднозначность разбиения системы функциональных уравнений на разрешающую и оценочную подсистемы влечёт неединственность (многовариантность) приближённых решений, их самопроверяемость и взаимную проверяемость. Общий интегральный метод развивает и обобщает известные подходы с точным выполнением или определяющих уравнений, или граничных условий. Возможно сочетание общего интегрального метода с общим (полу)степенным методом для явного отыскания (в классах (полу)степенных рядов) аналитического решения разрешающей подсистемы как псевдорешения (частичного решения) системы функциональных уравнений.

Если искомые функции имеют общую область определения, которую целесообразно рассмотреть или как единый макроэлемент, или как соединение макроэлементов, то общий интегральный метод решения общих систем функциональных уравнений даёт как свой частный случай общий интегральный аналитический метод макроэлементов.

Создан и общий метод косвенной (дополнительно к известной прямой) оценки неточности псевдорешения, в частности приближённого решения, средней относительной погрешностью неудовлетворения уравнений задачи при его подстановке (с обобщением оценки по невязке).

Дополнительно к верно используемой относительной погрешности введена как инвариантная мера неточности, верно обобщающей нечёткую приближённость, линейная, квадратичная и с максимумом всеобщая погрешность от 0 до 1 ($c//d = c/d$ при $c \neq 0$; $c//d = 0$ при $c=0$ и любом $d$):

$E_{a=?b} = \|a - b\|//(\|a\| + \|b\|) \geq E_{a=?b,\,Q} = \|a - b\|//[2(\|a\|^2 + \|b\|^2)]^{1/2} \geq E_{a=?b,\,M} = \|a - b\|//(2\max\{\|a\|, \|b\|\})$.

Обобщение всеобщей погрешности для системы функциональных уравнений

$$\delta_\Lambda = (n_\Lambda^{-1}\Sigma_{\lambda\in\Lambda}{}^{g(\lambda)}\delta_\lambda{}^{g(\Lambda)})^{1/g(\Lambda)} \ (g(\lambda) > 0,\ g(\Lambda) > 0)$$

с общей для всех функций $f_\varphi$ произвольной областью определения $Z_\lambda$ и со значениями $z_\omega$, $f_\varphi$ и $L_\lambda$ из соответствующих линейных нормированных пространств с их индексами $\omega$, $\varphi$ и $\lambda$ даёт среднюю всеобщую погрешность функционального уравнения

$${}^{g(\lambda)}\delta_\lambda = \{\lim_{Z'(\lambda)\to Z(\lambda)} V_{Z'(\lambda)}{}^{-1}\int_{Z'(\lambda)}\|L_\lambda[_{\varphi\in\Phi}\ f_\varphi[_{\omega\in\Omega}\ z_\omega]]\|_\lambda{}^{g(\lambda)}/\sup_{Z'(\lambda)}\|L_\lambda[_{\varphi\in\Phi}\ f'_\varphi[_{\omega\in\Omega}\ z_\omega]]\|_\lambda{}^{g(\lambda)}\, dV_{Z'(\lambda)}\}^{1/g(\Lambda)},$$

причём точная верхняя грань $\sup_{Z'(\lambda)}$ берётся по множеству всех таких функций $f'_\varphi[_{\omega\in\Omega}\ z_\omega]$, что

$$\|f'_\varphi[_{\omega\in\Omega}\ z_\omega]\|_\varphi = \|f_\varphi[_{\omega\in\Omega}\ z_\omega]\|_\varphi,$$

с приближением области $Z(\lambda) = Z_\lambda$ её подмножествами $Z'(\lambda) = Z'_\lambda$ конечной меры $V_{Z'(\lambda)}$.

Средняя всеобщая погрешность уравнения упрощённо оценивается дробью

$$\underline{\delta}_\lambda = \mathrm{med}_{Z(\lambda)}\|L_\lambda[_{\varphi\in\Phi}\ f_\varphi[_{\omega\in\Omega}\ z_\omega]]\|_\lambda/\sup'_{Z(\lambda)}\|L_\lambda[_{\varphi\in\Phi}\ f'_\varphi[_{\omega\in\Omega}\ z_\omega]]\|_\lambda.$$

В правой части этой формулы числитель $\mathrm{med}_{Z(\lambda)}$ – некоторое просто вычисляемое среднее по области значение нормы левой части уравнения со всеми его элементами, а знаменатель $\sup'_{Z(\lambda)}$ – точная верхняя грань по области $Z(\lambda) = Z_\lambda$ суммы норм всех алгебраических слагаемых элементов уравнения непременно в исходном виде до возможного приведения подобных.

Если искомые функции имеют общую область определения как единый макроэлемент или соединение макроэлементов, то полная линейно-комбинационная методология и целочастичная (парциальная) методология решения общих систем функциональных уравнений дают как свои частные случаи полную линейно-комбинационную методологию макроэлементов и целочастичную (парциальную) методологию макроэлементов.

Общую аналитическую методологию макроэлементов в линейно-комбинационной и целочастичной (парциальной) модификациях даёт соединение полной линейно-комбинационной и целочастичной (парциальной) методологий макроэлементов.

Аналитическую методологию макроэлементов в её одноимённых модификациях даёт единение общих (полу)степенного и интегрального аналитических методов макроэлементов.

Приложение общего степенного метода к решению гармонического уравнения и через него трёхмерной упругой задачи в декартовой прямоугольной системе координат через три гармонические функции в форме Папковича-Нейбера основано на том, что класс степенных рядов с исходным общим видом решения $A(x, y, z) = \Sigma_{i=0}{}^\infty\Sigma_{j=0}{}^\infty\Sigma_{k=0}{}^\infty a_{ijk}x^iy^jz^k$ – собственный для оператора Лапласа $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ гармонического уравнения

$$\nabla^2 A(x, y, z) = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)A(x, y, z) = 0$$

при неопределённых числовых коэффициентах $a_{ijk}$ как искомых неизвестных параметрах.

Общий степенной метод даёт впервые достигаемое именно общее степенное решение

$$A(x, y, z) = \Sigma_{i=0}{}^\infty\Sigma_{j=0}{}^\infty\Sigma_{k=0}{}^\infty(-1)^{[i/2]}[i/2]!(i!j!k!)^{-1}\Sigma_{m=0}{}^{[i/2]}(j + 2m)!(k + 2[i/2] - 2m)!(m!([i/2] - m)!)^{-1}\, a_{i-2[i/2],j+2m,k+2[i/2]-2m}x^iy^jz^k \ ([M] = \mathrm{entier}\ M \text{ – целая часть числа } M)$$

гармонического уравнения в собственном для оператора этого уравнения классе степенных рядов через две двойные числовые последовательности $a_{0jk}$ при чётном $i$ и $a_{1jk}$ при нечётном $i$.

Приложение общего степенного метода к решению бигармонического уравнения и через него осесимметричной упругой задачи без объёмных сил и кручения в цилиндрической системе координат через бигармоническую функцию напряжений Лява основано на том, что класс степенных рядов – собственный для оператора бигармонического уравнения

$\nabla^2\nabla^2 L(r, z) = (\partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2)^2 L(r, z) = 0$ ($\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа)

с исходным общим видом решения $L(r, z) = \Sigma_{i=0}^{\infty}\Sigma_{j=0}^{\infty} a_{ij} r^i z^j$

при неопределённых числовых коэффициентах $a_{ij}$ как искомых неизвестных параметрах.

Общий степенной метод даёт впервые достигаемое общее степенное представление

$$L(r, z) = \Sigma_{i=0}^{\infty}\Sigma_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+1} i!^{-2} j!^{-1} 2^{-2i}(2i + j - 2)![4i a_{1,2i+j-2} + (2i + j - 1)(2i + j)(i - 1)a_{0,2i+j}] r^{2i} z^j$$

осесимметричной бигармонической функции и, в частности, функции напряжений Лява в осесимметричной упругой задаче без объёмных сил и кручения через две простые числовые последовательности $a_{0,2i+j}$ при чётном i и $a_{1,2i+j-2}$ при нечётном i, конечное при конечности этих обеих числовых последовательностей (условно считаются $1/(-1)! = 0$ и при $M < 0$ $M! = 1$, $a_{1M} = 0$). Проблема сходимости подобных рядов разрешима при конкретизации их и области определения и снимается при замене рядов конечными суммами в приближениях.

Дифференциальные операторы Лява дают формулы для радиального $u_r(r, z)$ и осевого $u_z(r, z)$ перемещений, радиального $\sigma_r(r, z)$, окружного $\sigma_t(r, z)$, осевого $\sigma_z(r, z)$ и сдвигового $\tau_{rz}(r, z)$ напряжений в осесимметричной упругой задаче без объёмных сил и кручения:

$$u_r(r, z) = (1 + \mu)E^{-1}\Sigma_{i=0}^{\infty}\Sigma_{j=0}^{\infty}[(-1)^{i+1}(2i + j + 1)! i!^{-2} j!^{-1} 2^{1-2i} a_{1,2i+j+1} +$$
$$(-1)^{i+1}(2i + j + 3)!(i - 1)!^{-1}(i + 1)!^{-1} j!^{-1} 2^{-1-2i} a_{0,2i+j+3}] r^{2i+1} z^j; \; u_z(r, z) =$$
$$(1 + \mu)E^{-1}\Sigma_{i=0}^{\infty}\Sigma_{j=0}^{\infty}(-1)^i i!^{-2} j!^{-1}[(i + 2 - 2\mu)(2i + j)! 2^{2-2i} a_{1,2i+j} + (i + 1 - 2\mu)(2i + j + 2)! 2^{-2i} a_{0,2i+j+2}] r^{2i} z^j;$$
$$\sigma_r(r, z) = \Sigma_{i=0}^{\infty}\Sigma_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+1} i!^{-2} j!^{-1} 2^{-1-2i}\{4(2i + 1 - 2\mu)(2i + j + 1)! a_{1,2i+j+1} + [2(i - \mu) - i/(i + 1)](2i + j + 3)!$$
$$a_{0,2i+j+3}\} r^{2i} z^j; \; \sigma_t(r, z) = \Sigma_{i=0}^{\infty}\Sigma_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+1} i!^{-2} j!^{-1} 2^{-1-2i}\{4(1 - 2\mu)(2i + j + 1)! a_{1,2i+j+1} +$$
$$[(1 - 2\mu)i - 2\mu)](i + 1)^{-1}(2i + j + 3)! a_{0,2i+j+3}\} r^{2i} z^j;$$
$$\sigma_z(r, z) = \Sigma_{i=0}^{\infty}\Sigma_{j=0}^{\infty}(-1)^i i!^{-2} j!^{-1} 2^{-2i}[4(i + 2 - \mu)(2i + j + 1)! a_{1,2i+j+1} + (i + 1 - \mu)(2i + j + 3)! a_{0,2i+j+3}] r^{2i} z^j;$$
$$\tau_{rz}(r, z) = \Sigma_{i=0}^{\infty}\Sigma_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+1} i!^{-1}(i + 1)!^{-1} j!^{-1} 2^{-1-2i}[4(i + 2 - \mu)(2i + j + 2)! a_{1,2i+j+2} +$$
$$(i + 1 - \mu)(2i + j + 4)! a_{0,2i+j+4}] r^{2i+1} z^j.$$

Принципиальная новизна и практическая ценность общего (полу)степенного метода заключается в получении и применении именно общих решений задач в (полу)степенных рядах, в данном случае общего представления осесимметричной бигармонической функции, в том числе функции напряжений Лява или осевого напряжения, взамен ограниченных частных представлений. Новые возможности достигнутого общего представления подобны таковым при введении бесконечных рядов в дополнение к конечным алгебраическим суммам.

В рациональной конструкции иллюминатора для высоких давлений поле зрения не должно сужаться, и поэтому давление p внешней среды в такой конструкции действует на всю поверхность $0 \le r \le a$ внешнего основания $z = h$ светопрозрачного элемента. Для устранения силовых контактов стеклоэлемента с деталями из других материалов целесообразно удерживать светопрозрачный элемент в равновесии противодавлением $p_2 = pa^2/(a^2 - a_1^2)$ на кольцевую периферическую часть $a_1 \le r \le a$ частично нагруженного внутреннего основания $z = 0$. В связи с малостью отношения пределов прочности неорганического стекла при растяжении и сжатии полезно обжатие стеклоэлемента давлением $p_1$ на боковую поверхность $r = a$. Существует наилучшее значение отношения $\Pi = p_1/p$. Отношения давлений $\Pi = p_1/p$ и $p_2/p$ поддерживаются автоматически двумя двухступенчатыми поршнями с соответствующими отношениями площадей сечений ступеней.

Принятие допущений линейной теории упругости и этой расчётной схемы, не учитывающей особенностей взаимодействия стеклоэлементов с оправами и уплотнительными кольцами, ведёт к погрешностям, которые, как показано в дальнейшем путём сопоставления расчётных и экспериментальных результатов, невелики, и позволяет исследовать деформирование светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений независимо от его оправы и получить универсальное замкнутое решение методом функций напряжений Лява.

Удовлетворяющая этим требованиям конструкция иллюминатора для высоких давлений и схема нагружения его светопрозрачного элемента показаны на рис. 1.

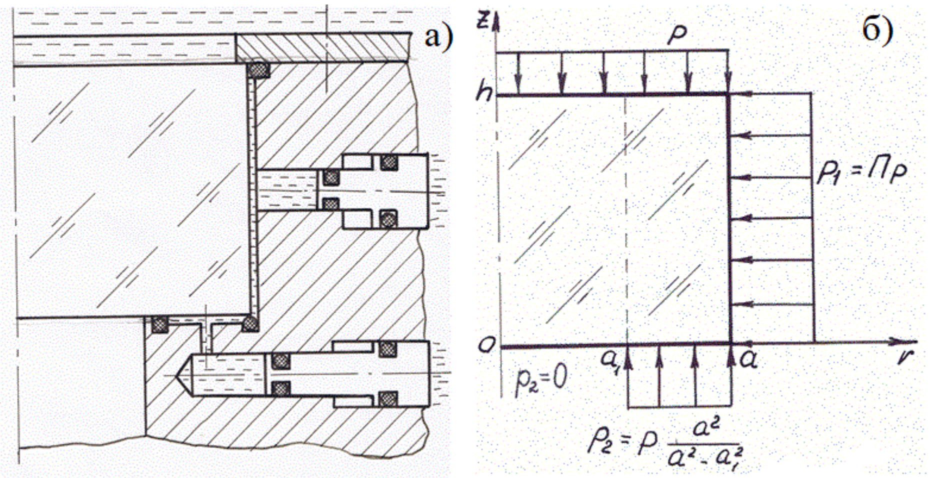



Рисунок 1. Рассматриваемая конструкция (а) иллюминатора для высоких давлений и схема нагружения (б) его светопрозрачного элемента.

В задаче о сплошном трёхмерном цилиндрическом теле отделим по принципу наложения (суперпозиции) радиальное $u_r(r, z)$ и осевое $u_z(r, z)$ перемещения, радиальное $\sigma_r(r, z)$, окружное $\sigma_t(r, z)$, осевое $\sigma_z(r, z)$ и сдвиговое $\tau_{rz}(r, z)$ напряжения от $p_1$ по формулам Ламе

$$u_r(r, z) = -(1 - \mu)rp_1/E;\ u_z(r, z) = 2\mu z p_1/E;\ \sigma_r(r, z) = -p_1;\ \sigma_t(r, z) = -p_1;\ \sigma_z(r, z) = 0;\ \tau_{rz}(r, z) = 0.$$

Пока считаем $p_1 = 0$ (см. рис. 1). Есть скачок осевого напряжения $\sigma_z(r, z)$ при $r = a_1$ на внутреннем основании $z = 0$. В решении теории пластин различны выражения на участках $0 \le r \le a_1$ и $a_1 \le r \le a$. Тогда логично мысленное рассечение тела соосной (коаксиальной) цилиндрической поверхностью $r = a_1$ на круглую центральную часть радиусом $a_1$ и кольцевую периферическую часть внутренним радиусом $a_1$ и внешним радиусом a. Смысл рассечения – в том, что будут построены решения отдельно для круглой центральной $0 \le r \le a_1$ и кольцевой периферической $a_1 \le r \le a$ частей и последует сопряжение решений на поверхности $r = a_1$.

Для упрощения используем безразмерные величины

$$\rho = r/h;\ \zeta = z/h;\ b = a_1/h;\ c = a/h;\ \Lambda(\rho, \zeta) = L(r, z)/(ph^3) = L(h\rho, h\zeta)/(ph^3);$$

$$u_\rho(\rho, \zeta) = u_r(r, z)(1 + \mu)^{-1}E/(ph);\ u_\zeta(\rho, \zeta) = u_z(r, z)(1 + \mu)^{-1}E/(ph);$$

$$\sigma_\rho(\rho, \zeta) = \sigma_r(r, z)/p;\ \sigma_\varphi(\rho, \zeta) = \sigma_t(r, z)/p;\ \sigma_\zeta(\rho, \zeta) = \sigma_z(r, z)/p;\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) = \tau_{rz}(r, z)/p,$$

где $L(r, z)$ – бигармоническая размерная функция напряжений Лява;

$\Lambda(\rho, \zeta)$ – бигармоническая безразмерная функция напряжений Лява.

Оператор Лапласа принимает безразмерный вид $\nabla^2 = \partial^2/\partial\rho^2 + \rho^{-1}\partial/\partial\rho + \partial^2/\partial\zeta^2$. Безразмерные перемещения и напряжения выражаются безразмерными линейными дифференциальными операторами через бигармоническую ($\nabla^2\nabla^2\Lambda(\rho, \zeta) = 0$) безразмерную функцию Лява $\Lambda(\rho, \zeta)$:

$$u_\rho(\rho, \zeta) = -\partial^2\Lambda(\rho, \zeta)/(\partial\rho\partial\zeta);\ u_\zeta(\rho, \zeta) = (2(1 - \mu)\nabla^2 - \partial^2/\partial\zeta^2)\Lambda(\rho, \zeta);$$

$$\sigma_\rho(\rho, \zeta) = (\partial/\partial\zeta)(\mu\nabla^2 - \partial^2/\partial\rho^2)\Lambda(\rho, \zeta);\ \sigma_\varphi(\rho, \zeta) = (\partial/\partial\zeta)(\mu\nabla^2 - \rho^{-1}\partial/\partial\rho)\Lambda(\rho, \zeta);$$

$$\sigma_\zeta(\rho, \zeta) = (\partial/\partial\zeta)((2 - \mu)\nabla^2 - \partial^2/\partial\zeta^2)\Lambda(\rho, \zeta);\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) = (\partial/\partial\rho)((1 - \mu)\nabla^2 - \partial^2/\partial\zeta^2)\Lambda(\rho, \zeta).$$

Условия равновесия и совместности деформаций выполняются тождественно благодаря условию бигармоничности $\nabla^2\nabla^2\Lambda(\rho, \zeta) = 0$. Удовлетворим ему и граничным условиям:

$$\nabla^2\nabla^2\Lambda(\rho, \zeta) = 0;\ \sigma_\rho(c, \zeta) = 0;\ \tau_{\rho\zeta}(c, \zeta) = 0;\ \sigma_\zeta(\rho, 0) = 0,\ 0 \le \rho < b;\ \sigma_\zeta(\rho, 0) = -p_2/p = -a^2/(a^2 - a_1^2),\ b \le r \le c;\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, 0) = 0;\ \sigma_\zeta(\rho, 1) = -1;\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, 1) = 0;\ u_\rho(b - 0, \zeta) = u_\rho(b + 0, \zeta);\ u_\zeta(b - 0, \zeta) = u_\zeta(b + 0, \zeta);$$

$$\sigma_\rho(b-0, \zeta) = \sigma_\rho(b+0, \zeta);\ \sigma_\varphi(b - 0, \zeta) = \sigma_\varphi(b + 0, \zeta);\ \sigma_\zeta(b - 0, \zeta) = \sigma_\zeta(b + 0, \zeta);\ \tau_{\rho\zeta}(b - 0, \zeta) = \tau_{\rho\zeta}(b + 0, \zeta).$$

Решения для пластин и плит и общий степенной метод обобщаются общим полустепенным методом с любыми конечными разложениями функций напряжений Лява $\Lambda(\rho, \zeta)$ для круглой и кольцевой периферической частей (сплошного центрального и кольцевого периферического трёхмерных цилиндрических элементов) по любому числу неотрицательных степеней любой из переменных осесимметричной задачи теории упругости с коэффициентами в виде любых четырежды дифференцируемых функций другой переменной. Такими ввиду асимметрии и отсутствия взаимозаменяемости переменных $\rho$ и $\zeta$ осесимметричной задачи являются принципиально разные представления $\Lambda(\rho, \zeta) = \Sigma_{i=0}^{n} f_i(\zeta)\rho^i$, $\Lambda(\rho, \zeta) = \Sigma_{i=0}^{n} g_i(\rho)\zeta^i$, дающие менее общее представление для круглой части и более общее для кольцевой части соответственно

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \Sigma_{i=0}^{n}\rho^{2i}\,\Sigma_{j=0}^{2n-2i}a_{ij}\zeta^j,\ \Lambda(\rho, \zeta) = \Sigma_{i=0}^{n}\Sigma_{j=0}^{2n-2i}(a_{ij}\rho^{2i} + b_{ij}\rho^{2i}\ln\rho)\,\zeta^j = \Sigma_{i=0}^{n}\rho^{2i}\Sigma_{j=0}^{2n-2i}(a_{ij} + b_{ij}\ln\rho)\,\zeta^j.$$

С частичным использованием бигармоничности и граничных условий на торцах (плоских основаниях) доказано: невыполнимы граничные условия на боковой поверхности независимо от условий на основаниях; в последних формулах нет слагаемых с безразмерным радиусом ρ более чем в шестой степени и содержащих lnρ слагаемых с ρ более чем в четвёртой степени:

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \Sigma_{i=0}{}^{3}\Sigma_{j=0}{}^{6-2i}a_{ij}\rho^{2i}\zeta^{j},\ \Lambda(\rho, \zeta) = \Sigma_{i=0}{}^{3}\Sigma_{j=0}{}^{6-2i}a_{ij}\rho^{2i}\zeta^{j} + \Sigma_{i=0}{}^{2}\Sigma_{j=0}{}^{4-2i}b_{ij}\rho^{2i}\ln\rho\ \zeta^{j}.$$

Определим безразмерные функции Лява Λ(ρ, ζ) для сплошного и кольцевого трёхмерных цилиндрических элементов, полностью удовлетворяющие граничным условиям на торцах.

Для сплошного трёхмерного цилиндрического тела и для круглой центральной части сплошного трёхмерного цилиндрического тела безразмерная функция напряжений Лява $\Lambda(\rho, \zeta) = a_{00} + a_{01}\zeta + a_{02}\zeta^2 - 2/3\ (2 - \mu)/(1 - \mu)\ a_{11}\zeta^3 - 8/3\ (2 - \mu)/\mu\ a_{20}\zeta^4 + (3 - \mu)/20\ \zeta^5 - (3 - \mu)/60\ \zeta^6 + \rho^2[a_{10} + a_{11}\zeta + 8(1 - \mu)/\mu\ a_{20}\zeta^2 - (2 - \mu)/4\ \zeta^3 + (2 - \mu)/8\ \zeta^4] + \rho^4[a_{20} + 3(1 - \mu)/32\ \zeta - 3(1 - \mu)/32\ \zeta^2] - \mu/192\ \rho^6$; безразмерные радиальное $u_\rho(\rho, \zeta)$ и осевое $u_\zeta(\rho, \zeta)$ перемещения $u_\rho(\rho, \zeta) = \rho[- 2a_{11} - 32(1 - \mu)/\mu\ a_{20}\zeta + 3(2 - \mu)/2\ \zeta^2 - (2 - \mu)\zeta^3] + \rho^3[- 3(1 - \mu)/8 + 3(1 - \mu)/4\ \zeta]$; $u_\zeta(\rho, \zeta) = C_1 + 4\mu/(1 - \mu)\ a_{11}\zeta + 32a_{20}\zeta^2 - (1 + \mu)\zeta^3 + (1 + \mu)/2\ \zeta^4 + \rho^2[16(1 - \mu)/\mu\ a_{20} + 3\mu/2\ \zeta - 3\mu/2\ \zeta^2] - 3(1 - \mu)/16\ \rho^4$ ($C_1$ – постоянная); безразмерные радиальное $\sigma_\rho(\rho, \zeta)$, тангенциальное (окружное) $\sigma_\varphi(\rho, \zeta)$, осевое $\sigma_\zeta(\rho, \zeta)$ и сдвиговое $\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta)$ напряжения $\sigma_\rho(\rho, \zeta) = - 2(1 + \mu)/(1 - \mu)\ a_{11} - 32(1 + \mu)/\mu\ a_{20}\zeta + 3(2 + \mu)/2\ \zeta^2 - (2 + \mu)\zeta^3 + \rho^2[- 3(3 + \mu)/8 + 3(3 + \mu)/4\ \zeta]$; $\sigma_\varphi(\rho, \zeta) = - 2(1 + \mu)/(1 - \mu)\ a_{11} - 32(1 + \mu)/\mu\ a_{20}\zeta + 3(2 + \mu)/2\ \zeta^2 - (2 + \mu)\zeta^3 + \rho^2[- 3(1 + 3\mu)/8 + 3(1 + 3\mu)/4\ \zeta]$; $\sigma_\zeta(\rho, \zeta) = - 3\zeta^2 + 2\zeta^3$; $\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) = \rho(3\zeta - 3\zeta^2)$.

Из 6 коэффициентов $a_{00}$, $a_{01}$, $a_{02}$, $a_{10}$, $a_{11}$, $a_{20}$ два $a_{00}$, $a_{01}$ не влияют на перемещения и напряжения, два $a_{02}$, $a_{10}$ излишни при постоянной $C_1$ для осевого перемещения тела как абсолютно твёрдого. Коэффициенты $a_{11}$ и $a_{20}$ для наилучшего удовлетворения граничным условиям на боковой поверхности влияют на безразмерные радиальное $u_\rho(\rho, \zeta)$ и осевое $u_\zeta(\rho, \zeta)$ перемещения, радиальное $\sigma_\rho(\rho, \zeta)$ и тангенциальное (окружное) $\sigma_\varphi(\rho, \zeta)$ напряжения. А безразмерные осевое $\sigma_\zeta(\rho, \zeta)$ и сдвиговое $\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta)$ напряжения не зависят от $a_{11}$ и $a_{20}$.

Для кольцевого трёхмерного цилиндрического тела (элемента) и кольцевой периферической части трёхмерного цилиндрического тела (элемента) безразмерная функция напряжений Лява

$$\Lambda(\rho, \zeta) = a_{00} + a_{01}\zeta + a_{02}\zeta^2 + [- K_2/(6(1 - \mu)) - 2/3\ (2 - \mu)/(1 - \mu)\ a_{11} + 16/3\ (2 - \mu)/\mu\ b_{20}]\zeta^3 - [8/3\ (2 - \mu)/\mu\ a_{20} + 4(2 - \mu)/\mu\ b_{20}]\zeta^4 - (K_2 - 1)(3 - \mu)/20\ \zeta^5 + (K_2 - 1)(3 - \mu)/60\ \zeta^6 + \ln\rho[b_{00} + b_{01}\zeta + 2(1 - \mu)/\mu\ b_{10}\zeta^2 + 16/3\ (2 - \mu)/\mu\ b_{20}\zeta^3 - 8/3\ (2 - \mu)/\mu\ b_{20}\zeta^4] + \rho^2\{a_{10} + a_{11}\zeta + [8(1 - \mu)/\mu\ a_{20} + 4(1 - \mu)/\mu\ b_{20}]\zeta^2 + (K_2 - 1)(2 - \mu)/4\ \zeta^3 - (K_2 - 1)(2 - \mu)/8\ \zeta^4\} + \rho^2\ln\rho[b_{10} - 8(1 - \mu)/\mu\ b_{20}\zeta + 8(1 - \mu)/\mu\ b_{20}\zeta^2] + \rho^4[a_{20} - 3(K_2 - 1)(1 - \mu)/32\ \zeta + 3(K_2 - 1)(1 - \mu)/32\ \zeta^2] + \rho^4\ln\rho\ b_{20} + (K_2 - 1)\mu/192\ \rho^6;$$

безразмерные радиальное $u_\rho(\rho, \zeta)$ и осевое $u_\zeta(\rho, \zeta)$ перемещения ($C_2$ – произвольная постоянная, поглотившая сумму $8(1 - \mu)a_{10} + 2(1 - 2\mu)a_{02} + 8(1 - \mu)b_{10}$), радиальное $\sigma_\rho(\rho, \zeta)$, тангенциальное (окружное) $\sigma_\varphi(\rho, \zeta)$, осевое $\sigma_\zeta(\rho, \zeta)$ и сдвиговое $\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta)$ напряжения

$$u_\rho(\rho, \zeta) = \rho^{-1}[- b_{01} - 4(1 - \mu)/\mu\ b_{10}\zeta - 16(2 - \mu)/\mu\ b_{20}\zeta^2 + 32/3\ (2 - \mu)/\mu\ b_{20}\zeta^3] + \rho[- 2a_{11} + 8(1 - \mu)/\mu\ b_{20} - 32(1 - \mu)/\mu\ (a_{20} + b_{20})\zeta - 3(K_2 - 1)(2 - \mu)/2\ \zeta^2 + (K_2 - 1)(2 - \mu)\zeta^3] + \rho\ln\rho[16(1 - \mu)/\mu\ b_{20} - 32(1 - \mu)/\mu\ b_{20}\zeta] + \rho^3[3(K_2 - 1)(1 - \mu)/8 - 3(K_2 - 1)(1 - \mu)/4\ \zeta];$$

$$u_\zeta(\rho, \zeta) = C_2 + [- K_2(1 - 2\mu)/(1 - \mu) + 4\mu/(1 - \mu)\ a_{11} - 32b_{20}]\zeta + (32a_{20} + 48b_{20})\zeta^2 + (K_2 - 1)(1 + \mu)\zeta^3 - (K_2 - 1)(1 + \mu)/2\ \zeta^4 + \ln\rho[4(1 - \mu)/\mu\ b_{10} - 32b_{20}\zeta + 32b_{20}\zeta^2] + \rho^2[16(1 - \mu)/\mu\ a_{20} + 8(1 - \mu)/\mu\ b_{20} - 3(K_2 - 1)\mu/2\ \zeta + 3(K_2 - 1)\mu/2\ \zeta^2] + 16(1 - \mu)/\mu\ b_{20}\rho^2\ln\rho - 3(1 - \mu)/16\ \rho^4;$$

$$\sigma_\rho(\rho, \zeta) = \rho^{-2}[b_{01} + 4(1 - \mu)/\mu\ b_{10}\zeta + 16(2 - \mu)/\mu\ b_{20}\zeta^2 - 32/3\ (2 - \mu)/\mu\ b_{20}\zeta^3] - K_2\mu/(1 - \mu) - 2(1 + \mu)/(1 - \mu)\ a_{11} + 8(3 + \mu)/\mu\ b_{20} - [32(1 + \mu)/\mu\ a_{20} + 32(2 + \mu)/\mu\ b_{20}]\zeta - 3(K_2 - 1)(2 + \mu)/2\ \zeta^2 + (K_2 - 1)(2 + \mu)\zeta^3 + \ln\rho[16(1 + \mu)/\mu\ b_{20} - 32(1 + \mu)/\mu\ b_{20}\zeta] + \rho^2[3(K_2 - 1)(3 + \mu)/8 - 3(K_2 - 1)(3 + \mu)/4\ \zeta];$$

$$\sigma_\varphi(\rho, \zeta) = \rho^{-2}[- b_{01} - 4(1 - \mu)/\mu\ b_{10}\zeta - 16(2 - \mu)/\mu\ b_{20}\zeta^2 + 32/3\ (2 - \mu)/\mu\ b_{20}\zeta^3] - K_2\mu/(1 - \mu) - 2(1 + \mu)/(1 - \mu)\ a_{11} + 8(1 + 3\mu)/\mu\ b_{20} - [32(1 + \mu)/\mu\ a_{20} + 32(2 + \mu)/\mu\ b_{20}]\zeta - 3(K_2 - 1)(2 + \mu)/2\ \zeta^2 + (K_2 - 1)(2 + \mu)\zeta^3 + \ln\rho[16(1 + \mu)/\mu\ b_{20} - 32(1 + \mu)/\mu\ b_{20}\zeta] + \rho^2[3(K_2 - 1)(1 + 3\mu)/8 - 3(K_2 - 1)(1 + 3\mu)/4\ \zeta];$$

$$\sigma_\zeta(\rho, \zeta) = - K_2 + 3(K_2 - 1)\zeta^2 - 2(K_2 - 1)\zeta^3;\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) = [32\mu^{-1}b_{20}\rho^{-1} + 3(K_2 - 1)\rho](- \zeta + \zeta^2).$$

Из 10 произвольных коэффициентов $a_{00}$, $a_{01}$, $b_{00}$, $a_{02}$, $a_{10}$, $a_{11}$, $a_{20}$, $b_{01}$, $b_{10}$, $b_{20}$ несущественные три $a_{00}$, $a_{01}$, $b_{00}$ не влияют на перемещения и напряжения, два $a_{02}$, $a_{10}$ поглощаются постоянной $C_2$ для аннулирования $u_\zeta(\rho, \zeta)$ на одной окружности. Существенные коэффициенты $a_{11}$, $a_{20}$, $b_{01}$, $b_{10}$, $b_{20}$ влияют на безразмерные радиальное $u_\rho(\rho, \zeta)$ и осевое $u_\zeta(\rho, \zeta)$ перемещения, радиальное $\sigma_\rho(\rho, \zeta)$ и тангенциальное (окружное) $\sigma_\varphi(\rho, \zeta)$ напряжения. Безразмерное осевое напряжение

$\sigma_\zeta(\rho, \zeta)$ не зависит от $a_{11}$, $a_{20}$, $b_{01}$, $b_{10}$, $b_{20}$. А безразмерное сдвиговое напряжение $\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta)$ зависит от $b_{20}$. Условие бигармоничности и граничные условия на основаниях выполнены точно при любых значениях постоянных $a_{11}$, $a_{20}$, $b_{01}$, $b_{10}$, $b_{20}$ и $C_2$. Сами эти произвольные постоянные остаются в запасе для наилучшего удовлетворения граничным условиям на боковых поверхностях, то есть на поверхности сопряжения $\rho = b$ и на внешней поверхности $\rho = c$. Понятие невязок сопряжения по Л. Б. Цвику как разностей одноимённых величин, в т. ч. перемещений и напряжений, для частей тела с общей границей в её точках обобщаем для границ тела разностями граничных условий и величин в точках границ тела с методами минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной 1, минимаксами их модулей 2 и коллокационной 3 в теории минимизации невязок сопряжения. Предстоит минимизация невязок сопряжения радиального перемещения и радиального напряжения на боковых поверхностях круглой центральной и кольцевой периферической частей трёхмерного цилиндрического тела (элемента). Эти невязки сопряжения пропорциональны многочлену $Q(\zeta) = A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3$ относительно $\zeta$ на отрезке [0, 1], причём коэффициенты A и B могут изменяться, а коэффициенты при $\zeta^2$ и $\zeta^3$ постоянны и относятся друг к другу как 3:(-2). К первому методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения сводится аннулирование среднего $\int_0^1 Q(\zeta)d\zeta$ и момента $\int_0^1 Q(\zeta)\zeta d\zeta$. Созданная теория минимизации невязок сопряжения приводит к аналитическому объединению результатов всех трёх методов 1, 2, 3 минимизации невязок сопряжения: $A = m/2$; $B = - (1 + m)$; $m_1 = 1/5$; $m_2 = 1/8$; $m_3 = 0$.

Теория изгиба равномерным давлением на одно основание именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, защемлённого по краю $r = a$, даёт радиальное $u_r(r, z)$ и осевое $u_z(r, z)$ перемещения, радиальное $\sigma_r(r, z)$, окружное $\sigma_t(r, z)$, осевое $\sigma_z(r, z)$ и сдвиговое $\tau_{rz}(r, z)$ напряжения в размерных координатах:

$$u_r(r, z)E/(ph) = \{m(1 + \mu)(2 - \mu)/4 + (3/8)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - [(m - 1)(1 + \mu)(2 - \mu)/2 + (3/4)(1 - \mu^2)a^2/h^2]z/h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h + [- 3(1 - \mu^2)/8 + (3/4)(1 - \mu^2)z/h]r^3/h^3;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) = - (m + 1)(1 + \mu)(2 - \mu)/4\ a^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)a^4/h^4 - [m\mu(1 + \mu)(1 - \mu/2)/(1 - \mu) + (3/4)\mu(1 + \mu)a^2/h^2]z/h + [(m + 1)\mu(1 + \mu)(1 - \mu/2)/(1 - \mu) + (3/4)\mu(1 + \mu)a^2/h^2]z^2/h^2 - (1 + \mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [(m + 1)(1 + \mu)(2 - \mu)/4 + (3/8)(1 - \mu^2)a^2/h^2 + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - \mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = (m/4)(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu) + (3/8)(1 + \mu)a^2/h^2 - [(1 + m)(1 + \mu)(1 - \mu/2)/(1 - \mu) + (3/4)(1 + \mu)a^2/h^2]z/h + (3/2)(2 + \mu)\,z^2/h^2 - (2 + \mu)\,z^3/h^3 + [- (3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_t(r, z)/p = (m/4)(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu) + (3/8)(1 + \mu)a^2/h^2 - [(1 + m)(1 + \mu)(2 - \mu/2)/(1 - \mu) + (3/4)(1 + \mu)a^2/h^2]z/h + (3/2)(2 + \mu)\,z^2/h^2 - (2 + \mu)\,z^3/h^3 + [- (3/8)(1 + 3\mu) + (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_z(r, z)/p = - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3;\ \tau_{rz}(r, z)/p = (3z/h - 3z^2/h^2)r/h.$$

Теория изгиба равномерным давлением на одно основание трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, опёртого по краю $r = a$, даёт:

$$u_r(r, z)E/(ph) = \{m(1 - \mu)(2 + \mu)/4 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 - [(1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)/2 + (3/4)(1 - \mu)(3+\mu)a^2/h^2]z/h+(3/2)(1+\mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h + [- 3(1 - \mu^2)/8 + (3/4)(1 - \mu^2)z/h]r^3/h^3;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) = - (1 + m)/4\ (1 - \mu)(2 + \mu)a^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu)(5 + \mu)a^4/h^4 - [m\mu(1 + \mu/2) + (3/4)\mu(3 + \mu)a^2/h^2]z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu/2) + (3/4)\mu(3 + \mu)a^2/h^2]z^2/h^2 - (1 + \mu)^2 z^3/h^3+(1/2)(1+\mu)^2 z^4/h^4+[(1+m)/4\ (1 - \mu)(2+\mu) + (3/8)(1 - \mu)(3+\mu)a^2/h^2 + (3/2)\mu(1+\mu)z/h - (3/2)\mu(1+\mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = m(2 + \mu)/4 + (3/8)(3 + \mu)a^2/h^2 - [(1 + m)(1 + \mu/2) + (3/4)(3 + \mu)a^2/h^2]z/h + (3/2)(2 + \mu)\,z^2/h^2 - (2 + \mu)\,z^3/h^3 + [- (3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_t(r, z)/p = m(2 + \mu)/4 + (3/8)(3 + \mu)a^2/h^2 - [(1 + m)(1 + \mu/2) + (3/4)(3 + \mu)a^2/h^2]z/h + (3/2)(2 + \mu)\,z^2/h^2 - (2 + \mu)\,z^3/h^3 + [- (3/8)(1 + 3\mu) + (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_z(r, z)/p = - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3;\ \tau_{rz}(r, z)/p = (3z/h - 3z^2/h^2)r/h.$$

Теория изгиба равномерным давлением на одно основание существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, опёртого по окружности меньшего радиуса $r = a_1 < a$, даёт: в центральной части $0 \le r \le a_1$ существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела

$$u_r(r, z)E/(ph) = \{m/4\ (1 - \mu)(2 + \mu) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/a_1) + [- (1 + m)(1 - \mu)(1 + \mu/2) - (3/2)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h + [- (3/8)(1 - \mu^2)+(3/4)(1 - \mu^2)z/h]r^3/h^3;$$

$u_z(r, z)E/(ph) = - (1 + m)/4\ (1 - \mu)(2 + \mu)a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a_1^2a^2/h^4 - (3/16)(1 - \mu)(3 - 5\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a/a_1) + [- m\mu(1 + \mu/2) - (3/2)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1)]z/h + [(1 + m)\mu(1 - \mu/2) + (3/2)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1)]z^2/h^2 - (1 + \mu)^2z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2z^4/h^4 + [- (1 + m)/4\ (1 - \mu)(2 + \mu) - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$

$\sigma_r(r, z)/p = m(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(1 + 3\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1) + [- (1 + m)(1 + \mu/2) - (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(2 + \mu)\, z^2/h^2 - (2 + \mu)\, z^3/h^3 + [- (3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h]r^2/h^2;$ $\sigma_t(r, z)/p = m(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(1 + 3\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1) + [- (1 + m)(1 + \mu/2) - (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(2 + \mu)\, z^2/h^2 - (2 + \mu)\, z^3/h^3 + [- (3/8)(1 + 3\mu) + (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2;$

$\sigma_z(r, z)/p = - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3;\ \tau_{rz}(r, z)/p = (3z/h - 3z^2/h^2)r/h;$

в периферической части $a_1 \le r \le a$ сплошного трёхмерного цилиндрического т<u>е</u>ла

$u_r(r, z)E/(ph) = \{- m/4\ (1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2 + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 + [(1 + m)(1 + \mu)(1 - \mu/2)a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4]z/h - (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2\, z^2/h^2 + (1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2\, z^3/h^3\}h/r + \{m(1 - \mu)(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)^2a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) + [- (1 + m)(1 - \mu)(1 + \mu/2) - (3/2)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/4)(1 - \mu)^2a^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2\ (1 - 2z/h)r/h \ln(r/h) - (3/8)(1 - \mu^2)(1 - 2z/h)r^3/h^3;$

$u_z(r, z)E/(ph) = - (1 + m)/4\ (1 - \mu)(2 + \mu)a_1^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu)(3 - 5\mu)a_1^4/h^4 + (3/8)(1 - \mu)(3 + 5\mu)a_1^2a^2/h^4 - (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a_1^2/(ah)) + (1 + m)(1 + \mu)(1 - \mu/2)a^2/h^2 \ln(a/h) + [- m\mu(1 + \mu/2) - (3/2)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu/2) + (3/2)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z^2/h^2 - (1 + \mu)^2z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2z^4/h^4 + [- (1 + m)(1 + \mu)(1 - \mu/2)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2\, z/h + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2\, z^2/h^2]\ln(r/h) + [(1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2\, r^2/h^2 \ln(r/h) - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$

$\sigma_r(r, z)/p = \{m/4\ (2 - \mu)a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu)a_1^2a^2/h^4 + [- (1 + m)(1 - \mu/2)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu)a_1^2a^2/h^4]z/h + (3/2)(2 - \mu)a^2/h^2\, z^2/h^2 - (2 - \mu)a^2/h^2\, z^3/h^3\}h^2/r^2 + m(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(3 + \mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h) + [- (1 + m)(1 + \mu/2) - (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(3 + \mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h + (3/2)(2 + \mu)\, z^2/h^2 - (2 + \mu)\, z^3/h^3 + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2\ (1 - 2z/h)\ln(r/h) + [- (3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h]r^2/h^2;$

$\sigma_t(r, z)/p = \{- m/4\ (2 - \mu)a^2/h^2 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2a^2/h^4 + [(1 + m)(1 - \mu/2)a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu)a_1^2a^2/h^4]z/h - (3/2)(2 - \mu)a^2/h^2\, z^2/h^2 + (2 - \mu)a^2/h^2\, z^3/h^3\}h^2/r^2 + m(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(- 1 + 5\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h) + [- (1 + m)(1 + \mu/2) - (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(- 1 + 5\mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h + (3/2)(2 + \mu)\, z^2/h^2 - (2 + \mu)\, z^3/h^3 + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2\ (1 - 2z/h)\ln(r/h) + [- (3/8)(1 + 3\mu) + (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2;$

$\sigma_z(r, z)/p = - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3;\ \tau_{rz}(r, z)/p = (- 3a^2z/h^3 + 3a^2z^2/h^4)h/r + (3z/h - 3z^2/h^2)r/h.$

С точки зрения оптических свойств светопрозрачного элемента рационально аннулирование прогиба центра поверхности низкого давления $u_z(0, 0) = 0$, при этом

$\ln(a/a_1) = (1/4)(1 + 3\mu)/(1 + \mu) + (1/8)(3 - 5\mu)/(1 + \mu)\ a_1^2/a^2 + (1/6)(1 + m)(2 + \mu)/(1 + \mu)\ h^2/a^2,$

то есть наилучший радиус опорной окружности не зависит от толщин<u>ы</u> лишь для $h \ll a$.

<u>Теория изгиба</u> равномерным давлением на одно основание сплошного трёхмерного цилиндрического т<u>е</u>ла, в частности светопрозрачного элемента, при <u>равномерном противодавлении на периферическую часть</u> $a_1 \le r \le a$ другого основания даёт:

в центральной части $0 \le r \le a_1$ существенно трёхмерного сплошного цилиндрического т<u>е</u>ла

$u_r(r, z)E/(ph) = \{m(1 - \mu^2)/2 + (1/2)\mu(1 - \mu) + (3/8)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a/a_1) + [- (1 + m)(1 - \mu^2) - (3/4)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 - 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h + [- (3/8)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu^2)z/h]r^3/h^3;$

$u_z(r, z)E/(ph) = - (1 + m)/2\ (1 - \mu^2)a_1^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 - (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + [- m\mu(1 + \mu) - \mu^2 - (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a_1^2/h^2\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a_1^2/h^2\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]z^2/h^2 - (1 + \mu)^2z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2z^4/h^4 + [(1 + m)(1 - \mu^2)/2 + (3/8)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$

$$\sigma_r(r, z)/p = m(1 + \mu)/2 + \mu/2 + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2/h^2\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + [- (1 + m)(1 + \mu) - (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - 3(1 + \mu)a_1^2/h^2\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(2 + \mu)\, z^2/h^2 - (2 + \mu)\, z^3/h^3 + [- (3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h]r^2/h^2;$$
$$\sigma_t(r, z)/p = m(1 + \mu)/2 + \mu/2 + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2/h^2\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + [- (1 + m)(1 + \mu) - (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - 3(1 + \mu)a_1^2/h^2\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(2 + \mu)\, z^2/h^2 - (2 + \mu)\, z^3/h^3 + [- (3/8)(1 + 3\mu) + (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2;$$
$$\sigma_z(r, z)/p = - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3;\ \tau_{rz}(r, z)/p = (3z/h - 3z^2/h^2)r/h;$$

в периферической части $a_1 \le r \le a$ сплошного трёхмерного цилиндрического т<u>е</u>ла

$$u_r(r, z)E/(ph)\ (a^2 - a_1^2)/a_1^2 = \{[m(1 - \mu^2)/2 - (1/2)\mu(1 + \mu)]a^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 + [- (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4]z/h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2\ z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2\ z^3/h^3\}h/r + \{- m(1 - \mu^2)/2 + (1/2)\mu(1 - \mu) + \mu a^2/a_1^2 + (3/8)(1 - \mu)^2(a^2 - a_1^2)/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) + [(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/4)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 - 3(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h - (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 + (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2\ (1 - 2z/h)r/h \ln(r/h) + (3/8)(1 - \mu^2)(1 - 2z/h)r^3/h^3;$$
$$u_z(r, z)E/(ph)\ (a^2 - a_1^2)/a_1^2 = (1 + m)/2\ (1 - \mu^2)a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a_1^2a^2/h^4 + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 - (1 + m)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (9/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a_1/h) - (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a/h) + [m\mu(1 + \mu) + \mu^2 - a^2/a_1^2 + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h + [- (1 + m)\mu(1 + \mu) - (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z^2/h^2 + (1 + \mu)^2z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)^2z^4/h^4 + [(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2\ z/h - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2\ z^2/h^2]\ln(r/h) + [- (1 + m)(1 - \mu^2)/2 - (3/8)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1 + \mu)z/h + (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2\ r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$
$$\sigma_r(r, z)/p\ (a^2 - a_1^2)/a_1^2 = \{[- m(1 - \mu)/2 + \mu/2]a^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)a_1^2a^2/h^4 + [(1 + m)(1 - \mu)a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu)a_1^2a^2/h^4]z/h - (3/2)(2 - \mu)a^2/h^2\ z^2/h^2 + (2 - \mu)a^2/h^2\ z^3/h^3\}h^2/r^2 - m(1 + \mu)/2 - \mu/2 - (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + [(1 + m)(1 + \mu) + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2]z/h - (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 + (2 + \mu)z^3/h^3 + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2\ (1 - 2z/h)\ln(a/r) + [- (3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h](a^2 - r^2)/h^2;$$
$$\sigma_t(r, z)/p\ (a^2 - a_1^2)/a_1^2 = \{[m(1 - \mu)/2 - \mu/2]a^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)a_1^2a^2/h^4 + [- (1 + m)(1 - \mu)a^2/h^2 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2a^2/h^4]z/h + (3/2)(2 - \mu)a^2/h^2\ z^2/h^2 - (2 - \mu)a^2/h^2\ z^3/h^3\}h^2/r^2 - m(1 + \mu)/2 - \mu/2 - (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - 5\mu)a^2/h^2 + [(1 + m)(1 + \mu) + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(1 - 5\mu)a^2/h^2]z/h - (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 + (2 + \mu)z^3/h^3 + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2\ (1 - 2z/h)\ln(a/r) + [(3/8)(1 + 3\mu) - (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2;$$
$$\sigma_z(r, z)/p\ (a^2 - a_1^2)/a_1^2 = - a^2/a_1^2 + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3;$$
$$\tau_{rz}(r, z)/p\ (a^2 - a_1^2)/a_1^2 = (3a^2z/h^3 - 3a^2z^2/h^4)h/r + (- 3z/h + 3z^2/h^2)r/h.$$

<u>Двухпараметрический метод минимизации невязки осевого перемещения</u> при сопряжении решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического т<u>е</u>ла даёт по методам 1, 2, 3 соответственно

$$\delta_1 = 7(1 - \mu)/20,\ \delta_2 = (1 - \mu)/4,\ \delta_3 = (13 - 11\mu)/32.$$

<u>Метод устранения минимизированных невязок сопряжения</u> с учётом давления $p_1$ даёт:

в центральной части $0 \le r \le a_1$ существенно трёхмерного сплошного цилиндрического т<u>е</u>ла

$$u_{r1}(r, z) = (p/E)r\{- (1 - \mu)(\underline{1/2} + p_1/p) + [\underline{(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)} + (3/8)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (3/8)(1 - \mu^2)r^2/h^2](1 - 2z/h) \underline{+ (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3}\};$$
$$u_{z1}(r, z) = (p/E)h\{2\mu(\underline{1/2} + p_1/p)z/h + [\underline{(1 + m)\mu(1 + \mu)} + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a_1^2/h^2\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)](- z/h + z^2/h^2) \underline{- (1 + \mu)^2z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2z^4/h^4} + [\underline{(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)} + (3/8)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) \underline{+ (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2}]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 \underline{+ (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)\ [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4]r^2/a_1^2}\};$$
$$\sigma_{r1}(r, z) = p\{- (\underline{1/2} + p_1/p) + [\underline{(1/2)(1 + m)(1 + \mu)} + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2/h^2\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (3/8)(3 + \mu)r^2/h^2](1 - 2z/h) \underline{+ (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3} \underline{+ (a_1^4 - a^4/2)/(a^2(a^2 - a_1^2))\ [m - 2(1 + m)z/h + 6z^2/h^2 - 4z^3/h^3]r^2/a_1^2}\};$$
$$\sigma_{t1}(r, z) = p\{- (\underline{1/2} + p_1/p) + [\underline{(1/2)(1 + m)(1 + \mu)} + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2/h^2\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (3/8)(1 + 3\mu)r^2/h^2](1 - 2z/h) \underline{+ (3/2)(2 + \mu)\, z^2/h^2 - (2 + \mu)\, z^3/h^3} \underline{+ (1/2)\mu a^2/(a^2 - a_1^2)\ [- (1 + m)(1 - 2z/h) - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3]r^2/a_1^2}\};$$
$$\sigma_{z1}(r, z) = \underline{p(- 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3)};\ \tau_{rz1}(r, z) = \underline{p(3z/h - 3z^2/h^2)r/h};$$

в периферической части $a_1 \le r \le a$ сплошного трёхмерного цилиндрического т<u>е</u>ла

$$u_{r2}(r, z) = (p/E)ra_1^2/(a^2 - a_1^2)\ \{[\underline{- (1/2)(1 + \mu)a^2/r^2} + (1 - \mu)[1/2 - (a^2 - a_1^2)/a_1^2\ p_1/p] \underline{+ \mu a^2/a_1^2} + [\underline{(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)(a^2/r^2 - 1)} + (3/8)(1 - \mu^2)[(a^2 - a_1^2)/h^2 - a_1^2a^2/(h^2r^2)] + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/a_1) + (3/8)(1 - \mu^2)r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(r/h)](1 - 2z/h) \underline{+ (2 - \mu)(a^2/r^2 - 1)(3/2\ z^2/h^2 - z^3/h^3)}\};$$

$$u_{z2}(r, z) = (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2)\ \{\underline{\delta(1 + \mu)a^2/a_1^2 + (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2} - (15/16)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \underline{- (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h)} + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2\ p_1/p \underline{- \mu} \underline{- a^2/a_1^2}]z/h + [\underline{(1 + m)\mu(1 + \mu)} + (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)](z/h - z^2/h^2) \underline{+ (1 + \mu)^2z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)^2z^4/h^4} + [\underline{(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2} - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \underline{+ 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2\ z/h - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2\ z^2/h^2}]\ln(r/h) + [\underline{- (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)} - (3/8)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) \underline{- (3/2)\mu(1 + \mu)z/h + (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2}]r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2\ r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 \underline{- (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2\ [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4](a - r)^2/(a - a_1)^2}\};$$

$$\sigma_{r2}(r, z) = pa_1^2/(a^2 - a_1^2)\ \{\underline{(1/2)a^2/r^2 + 1/2} - (a^2 - a_1^2)/a_1^2\ p_1/p + [\underline{- (1/2)(1 + m)(1 - \mu)(a^2/r^2 - 1)} + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2\ (a^2/r^2 - 1) + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/r) - (3/8)(3 + \mu)(a^2 - r^2)/h^2](1 - 2z/h) \underline{+ [2 + \mu + (2 - \mu)a^2/r^2](- 3/2\ z^2/h^2 + z^3/h^3) + [r^2/a^2 + (1/2)a^2/a_1^2\ (a - r)^2/(a - a_1)^2][m - 2(1 + m)z/h + 6z^2/h^2 - 4z^3/h^3]}\};$$

$$\sigma_{t2}(r, z) = pa_1^2/(a^2 - a_1^2)\ \{\underline{- (1/2)a^2/r^2 + 1/2} - (a^2 - a_1^2)/a_1^2\ p_1/p + [\underline{(1/2)(1 + m)(1 - \mu)(a^2/r^2 - (1 + \mu)/(1 - \mu))} - (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2\ (a^2/r^2 + 1) + (3/8)(1 - 5\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/r) + (3/8)(1 + 3\mu)r^2/h^2](1 - 2z/h) \underline{+ [2 + \mu - (2 - \mu)a^2/r^2](- 3/2\ z^2/h^2 + z^3/h^3) + (1/2)\mu a^2/a_1^2\ [(1 + m)(1 - 2z/h) + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3](a - r)^2/(a - a_1)^2}\};$$

$\sigma_{z2}(r, z) = \underline{pa_1^2/(a^2 - a_1^2)\ (- a^2/a_1^2 + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3)}$; $\tau_{rz2}(r, z) = \underline{pa_1^2/(a^2 - a_1^2)\ [a^2/(rh) - r/h](3z/h - 3z^2/h^2)}$.

Подчёркнуты добавления общего (полу)степенного метода к теории круглой пластины.

Этот смешанный параметрический метод устранения невязок сопряжения с использованием двухпараметрического метода (с параметрами m, δ) устранения минимизированной невязки осевого перемещения в остальном есть однопараметрический (с параметром m) метод.

Однопараметрический метод устранения именно всех невязок сопряжения отличается собственным устранением невязки осевого перемещения $u_z(r, z)$:

в центральной части $0 \le r \le a_1$ существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела

$$u_{z1}(r, z) = (p/E)h\{(\underline{\mu} + 2\mu p_1/p)z/h + [\underline{(1 + m)\mu(1 + \mu)} + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a_1^2/h^2\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)](- z/h + z^2/h^2) \underline{- (1 + \mu)^2z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2z^4/h^4} + [\underline{(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)} + (3/8)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) \underline{+ (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2}]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 + \underline{(1/2)[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)\ (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2)\ z/h + (1 + m)\mu(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2)\ (z/h - z^2/h^2) + (1 + \mu)^2a^2/(a^2 - a_1^2)\ z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)^2a^2/(a^2 - a_1^2)\ z^4/h^4}]r^2/a_1^2\};$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[\underline{(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2} + (3/8)(1 - \mu)^2a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4\ a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (3/16)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 + \underline{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)\ (1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}];$$

в периферической части $a_1 \le r \le a$ сплошного трёхмерного цилиндрического тела

$$u_{z2}(r, z) = (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2)\ \{\underline{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)\ (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 + (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2} - (15/16)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \underline{- (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h)} + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2\ p_1/p \underline{- \mu} \underline{- a^2/a_1^2}]z/h + [\underline{(1 + m)\mu(1 + \mu)} + (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)](z/h - z^2/h^2) \underline{+ (1 + \mu)^2z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)^2z^4/h^4} + [\underline{(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2} - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \underline{+ 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2\ z/h - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2\ z^2/h^2}]\ln(r/h) + [\underline{- (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)} - (3/8)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) \underline{- (3/2)\mu(1 + \mu)z/h + (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2}]r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2\ r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 - (1/2)a^2/a_1^2\ [\underline{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)\ (1/2)(1 - \mu^2)} \underline{- (1 + \mu)z/h} + \underline{(1 + m)\mu(1 + \mu)(z/h - z^2/h^2)} \underline{+ (1 + \mu)^2z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)^2z^4/h^4}](a - r)^2/(a - a_1)^2\}.$$

Общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию системы принципиально новых явлений и законов напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением, причём с коренными отличиями от известных закономерностей напряжённо-деформированных состояний круглых пластин и плит при осесимметричном изгибе равномерными давлениями:

существенное отклонение суммы значений радиального напряжения в центрах оснований от умноженного на минус два давления на боковую поверхность цилиндрического тела;

существование взаимности таких критических значений отношения давления на боковую поверхность к внешнему давлению не меньше 5/8 и коэффициента поперечной деформации, при превышении которых утонение сплошного трёхмерного цилиндрического тела вдоль оси сменяется утолщением вдоль оси с переходом через инвариантность длины осевой нормали;

кратное, примерно в три-четыре раза, превышение стрел прогиба центральной части и всего полностью нагруженного основания занижаемыми теорией круглой пластины примерно в

пять-шесть раз стрелами прогиба центральной части и всего частично нагруженного основания существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела соответственно.
Методическая, аналитическая и численная проверка и оценка методами теории пластин и теории плит доказала: они обобщаются и кратно уточняются поэтому достоверным общим (полу)степенным методом для существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела.
Достоверность общего (полу)степенного метода и открытых им принципиально новых явлений и законов напряжённо-деформированного состояния существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением с коренными отличиями от известных закономерностей напряжённо-деформированных состояний круглых пластин и плит при осесимметричном изгибе равномерными давлениями подтверждена методом конечных элементов. Открыты принципиально новые явление и закон смещения точки правильно по величине определённого созданным общим (полу)степенным методом достигаемого на цилиндрической поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей максимума $\tau_{max}$ сдвигового напряжения $\tau_{rz}(r, z)$ с середины толщины (высоты) в сторону частично нагруженного основания, причём в малой окрестности края $(a_1, 0)$ не нагруженной круглой центральной части частично нагруженного основания тела действует сдвиговое напряжение $\tau_{rz}(r, z)$ величиной, весьма близкой к его максимуму $\tau_{max}$.
Наиболее интересны сопоставления значений осевого перемещения $u_z(r, z)$. На рис. 2 видно, что соответствующие значения в существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе из неорганического стекла или органического стекла, определяющие стрелы прогиба оснований и их центральных участков и определённые по методу конечных элементов и по созданному общему (полу)степенному методу, в том числе однопараметрическим методом устранения невязок сопряжения по методу 1 среднеквадратичной минимизации, по методу 2 минимизации минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации, а также двухпараметрическим методом устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения близки между собой. Эти значения принадлежат соответствующим более широким промежуткам между нижним и верхним соответственно значениями с использованием двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения.

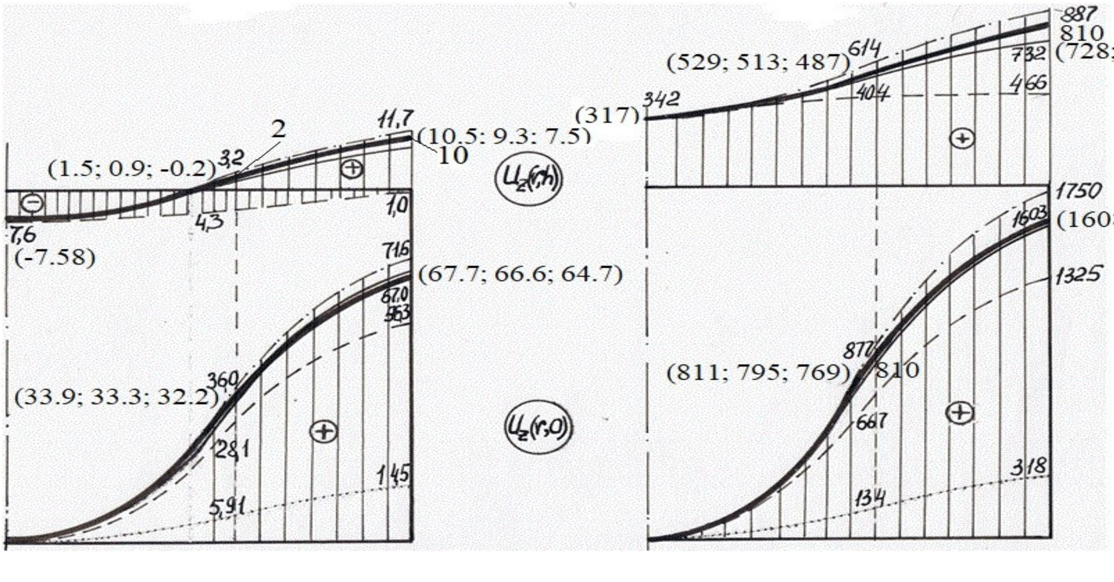



Рисунок 2. Сопоставление осевых перемещений (в микрометрах) $u_z(r, 0)$ и $u_z(r, h)$ внутренней $z = 0$ и внешней $z = h$ поверхностей оснований соответственно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента), в частности оптических поверхностей

светопрозрачного элемента из неорганического стекла (слева) или органического стекла (справа), определённых по методу конечных элементов (толстая сплошная кривая), по общему (полу)степенному методу, в том числе с использованием двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения (тонкая сплошная кривая), по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей (тонкая штриховая кривая) и по методу 3 коллокационной минимизации невязок (тонкая штрихпунктирная кривая), с использованием однопараметрического метода устранения невязок (в круглых скобках итоги по методам 1, 2, 3 соответственно), и по теории пластин (тонкая пунктирная кривая).

Для общего типа схем нагружения открыто явление существования основного типа, алгебраические суммы схем которого дают общий тип. Для общего в технике высоких давлений типа схем нагружения трёхмерного цилиндра со ступенчатыми давлениями на основания и с равномерным давлением на боковую поверхность основным является тип схем с равномерными давлениями на одно основание, на боковую поверхность и на кольцевую периферическую часть другого. Для общего типа схем осесимметричного нагружения без объёмных сил и кручения основным является тип схем с одним свободным основанием.

Общий интегральный метод без отказа от точности и без внесения заведомых погрешностей применяет сдвиговое напряжение как естественную функцию напряжений и использует наиболее сложное уравнение совместности деформаций лишь для оценки точности решения. В осесимметричной упругой задаче без объёмных сил и кручения с радиальным $\sigma_r(r, z)$, тангенциальным (окружным) $\sigma_t(r, z)$, осевым $\sigma_z(r, z)$ и сдвиговым $\tau_{rz}(r, z)$ напряжениями цилиндрический макроэлемент $0 \le a \le r \le b$, $c \le z \le d$ уравновешен граничными условиями $\sigma_r(a, z)$, $\tau_{rz}(a, z)$, $\sigma_r(b, z)$, $\tau_{rz}(b, z)$, $\sigma_z(r, c)$, $\tau_{rz}(r, c)$, $\sigma_z(r, d)$, $\tau_{rz}(r, d)$ в напряжениях с законом парности $\tau_{rz}(r, z)$ и последующими производными и интегралами (достаточна кусочная гладкость всех этих условий вместе с их вторыми производными). Уравнения равновесия

$$\partial\sigma_r(r, z)/\partial r + \partial\tau_{rz}(r, z)/\partial z + r^{-1}[\sigma_r(r, z) - \sigma_t(r, z)] = 0;\ \partial\tau_{rz}(r, z)/\partial r + \partial\sigma_z(r, z)/\partial z + r^{-1}\tau_{rz}(r, z) = 0$$

и уравнения совместности деформаций в напряжениях

$$(\partial/\partial r)\{\sigma_t(r, z) - \mu[\sigma_r(r, z) + \sigma_z(r, z)]\} + (1 + \mu)r^{-1}[\sigma_t(r, z) - \sigma_r(r, z)] = 0;\ r\partial^2/\partial z^2)\{\sigma_t(r, z) - \mu[\sigma_r(r, z) + \sigma_z(r, z)]\} - 2(1 + \mu)\partial\tau_{rz}(r, z)/\partial z + (\partial/\partial r)\{\sigma_z(r, z) - \mu[\sigma_r(r, z) + \sigma_t(r, z)]\} = 0$$

позволяют выразить все напряжения через единственное сдвиговое напряжение $\tau = \tau_{rz}(r, z)$:

$$\sigma_t(r, z) = \partial[r\sigma_r(r, z)]/\partial r + \partial[r\tau_{rz}(r, z)]/\partial z;\ \sigma_z(r, z) = \sigma_z(r, d) + r^{-1}\int_z^d\partial[r\tau_{rz}(r, z')]/\partial r\, dz';$$

$$\sigma_r(r, z) = \mu r^{-2}\int_a^r\sigma_z(r', d)r'dr' - \mu a r^{-2}\int_z^d\tau(a, z')dz' + \mu r^{-1}\int_z^d\tau(r, z')dz' - 2^{-1}(1 - \mu)r^{-2}\int_a^r r'^2\partial\tau_{rz}(r', z)/\partial z\, dr' - 2^{-1}(1 + \mu)\int_a^r\partial\tau_{rz}(r', z)/\partial z\, dr' + C_1(z) + r^{-2}C_2(z)$$ ($C_1(z)$ и $C_2(z)$ – произвольные функции только от z);

$$\sigma_r(r, z) = a^2r^{-2}(b^2 - r^2)(b^2 - a^2)^{-1}\sigma_r(a, z) + b^2r^{-2}(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)^{-1}\sigma_r(b, z) + \mu r^{-2}\int_a^r\sigma_z(r', d)r'dr' - \mu r^{-2}(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)^{-1}\int_a^b\sigma_z(r', d)r'dr' - 2^{-1}(1 + \mu)\int_a^r\partial\tau_{rz}(r', z)/\partial z\, dr' + 2^{-1}(1 + \mu)b^2r^{-2}(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)^{-1}\int_a^b\partial\tau_{rz}(r', z)/\partial z\, dr' - 2^{-1}(1 - \mu)r^{-2}\int_a^r r'^2\partial\tau_{rz}(r', z)/\partial z\, dr' + 2^{-1}(1 - \mu)r^{-2}(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)^{-1}\int_a^b r'^2\partial\tau_{rz}(r', z)/\partial z\, dr' + \mu r^{-1}\int_z^d\tau_{rz}(r, z')dz' + \mu a r^{-2}(r^2 - b^2)(b^2 - a^2)^{-1}\int_z^d\tau_{rz}(a, z')dz' - \mu b r^{-2}(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)^{-1}\int_z^d\tau_{rz}(b, z')dz'.$$

Для точного решения необходимо и достаточно удовлетворение функции напряжений $\tau_{rz}(r, z)$ оставшемуся громоздкому интегро-дифференциальному уравнению совместности:

$$\tau_{rz}(r, z) = - 2^{-1}a^2(b^2 - a^2)^{-1}[(1 + \mu)^{-1}r + (1 - \mu)^{-1}b^2r^{-1}]\partial\sigma_r(a, z)/\partial z + 2^{-1}b^2(b^2 - a^2)^{-1}[(1 + \mu)^{-1}r + (1 - \mu)^{-1}a^2/r]\partial\sigma_r(b, z)/\partial z - 4^{-1}r\int_a^r\partial^2\tau_{rz}(r', z)/\partial z^2\, dr' + 4^{-1}b^2(b^2 - a^2)^{-1}[r + (1 + \mu)(1 - \mu)^{-1}a^2r^{-1}]\int_a^b\partial^2\tau_{rz}(r', z)/\partial z^2\, dr' + 4^{-1} r^{-1}\int_a^r r'^2\partial^2\tau_{rz}(r', z)/\partial z^2\, dr' + 4^{-1}(b^2 - a^2)^{-1}[(1 - \mu)(1 + \mu)^{-1}r + a^2r^{-1}]\int_a^b r'^2\partial^2\tau_{rz}(r', z)/\partial z^2\, dr' - 2^{-1}\mu a(b^2 - a^2)^{-1}[(1 + \mu)^{-1}r + (1 - \mu)^{-1}b^2r^{-1}]\tau_{rz}(a, z) + 2^{-1}\mu b(b^2 - a^2)^{-1}[(1 + \mu)^{-1}r + (1 - \mu)^{-1}a^2r^{-1}]\tau_{rz}(b, z) + (1 - \mu^2)z\partial\sigma_z(r, d)/\partial r - 2^{-1}zr^{-2}\int_z^d\tau_{rz}(r, z')dz' + 2^{-1}zr^{-1}\int_z^d\partial\tau_{rz}(r, z')/\partial r\, dz' + 2^{-1}r^{-2}\int_z^d z'\tau_{rz}(r, z')dz' - 2^{-1}r^{-1}\int_z^d z'\partial\tau_{rz}(r, z')/\partial r\, dz' + 2^{-1} z\int_z^d\partial^2\tau_{rz}(r, z')/\partial r^2\, dz' - 2^{-1}\int_z^d z'\partial^2\tau_{rz}(r, z')/\partial r^2\, dz' + C(r)$$ ($C(r)$ – произвольная функция от r).

Это уравнение оставляется для оценки точности приближённого решения, выбирается по принципу допустимой простоты функция $\tau_{rz}(r, z)$, удовлетворяющая граничным условиям и уравнению равновесия каждой из частей элемента, отсечённых произвольной соосной (коаксиальной) цилиндрической поверхностью $r = r'$, и определяются остальные напряжения по указанным формулам (малейшее усложнение $\tau_{rz}(r, z)$ ведёт к громоздкости $\sigma_r(r, z)$ и $\sigma_t(r, z)$)

с наибольшей простотой и подобным итерационному уточнением. Сущность общего интегрального метода – в выборе простейшего статически возможного распределения $\tau_{rz}(r, z)$

$$\tau_{rz}(r, z) = (b^2 - r^2)(b^2 - a^2)^{-1}\tau_{rz}(a, z) + (r^2 - a^2)(b^2 - a^2)^{-1}\tau_{rz}(b, z) + 6(z - c)(d - z)(d - c)^{-3}\{- (b^2 - r^2)/(b^2 - a^2)\int_c^d\tau_{rz}(a, z)dz + [b/r - (r^2 - a^2)/(b^2 - a^2)]\int_c^d\tau_{rz}(b, z)dz + r^{-1}\int_r^b r'[\sigma_z(r', d) - \sigma_z(r', c)]dr'\} + (d - z)(2c + d - 3z)(d - c)^{-2}[\tau_{rz}(r, c) - (b^2 - r^2)(b^2 - a^2)^{-1}\tau_{rz}(a, c) - (r^2 - a^2)(b^2 - a^2)^{-1}\tau_{rz}(b, c)] + (z - c)(3z - c - 2d)(d - c)^{-2} [\tau_{rz}(r, d) - (b^2 - r^2)(b^2 - a^2)^{-1}\tau_{rz}(a, d) - (r^2 - a^2)(b^2 - a^2)^{-1}\tau_{rz}(b, d)].$$

Наибольшая простота $\tau_{rz}(r, z)$ следует из квадратичной интерполяции по r и линейной интерполяции по z и с квадратичным дополнительным слагаемым для выполнения условия

$$\int_r^b r'[\sigma_z(r', d) - \sigma_z(r', c)]dr' + b\int_c^d\tau_{rz}(b, z)dz - r\int_c^d\tau_{rz}(r, z)dz = 0.$$

Подстановка $\tau_{rz}(r, z)$ даёт громоздкие общие выражения всех напряжений, но проще сразу конкретизировать простейшее статически возможное распределение $\tau_{rz}(r, z)$ решаемой задачи. Например, в задаче Ламе, в том числе обобщённой, $\tau_{rz}(r, z) = 0$ на границах и внутри цилиндрического т<u>е</u>ла, что приводит к точным решению Ламе и его линейному обобщению.

Следовательно, если задача имеет точное решение, то оно в принципе может быть найдено общим интегральным методом, поскольку он не вносит заведомых погрешностей.

Другие нетривиальные точные решения для именно существенно трёхмерных цилиндрических тел, которые возможно применить к задачам прочности, неизвестны.

Поэтому представляется рациональным испытывать (тестировать) общий интегральный метод на задачах для именно существенно трёхмерных аналогов свободно опёртых и жёстко защемлённых по кр<u>а</u>ю круглых пластин и круглых плит, нагруженных равномерным давлением на одно основание, для которых имеются классические приближённые решения.

В задаче о <u>«свободно опёртом» по краю именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом упругом теле</u> $0 \le r \le a$, $0 \le z \le h$ под равномерным давлением p на верхнее основание $z = h$ на нём выполнено граничное условие для осевого напряжения $\sigma_z(r, h) = - p$.

Вначале предположим наличие уравновешивающего противодавления $pb^2/(b^2 - a^2)$ на узкую кольцевую часть $a \le r \le b$ основания $z = 0$. Тогда для $a \le r \le b$ и далее для $0 \le r \le a$

$$\tau_{rz}(a, z) = 3p(z/h - z^2/h^2)a/h, \quad \tau_{rz}(r, z) = 3p(z/h - z^2/h^2)r/h.$$

Получаем ещё одну формулу теории плит для осевого напряжения $\sigma_z(r, z) = p(- 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3)$ и также классические формулы теории пластин для радиального и окружного напряжений:

$$\sigma_r(r, z) = (3/8)(3 + \mu)p(a^2 - r^2)h^{-2}(1 - 2z/h); \quad \sigma_t(r, z) = (3/8)p[(3 + \mu)a^2 - (1 + 3\mu)r^2]h^{-2}(1 - 2z/h).$$

(Вместо этих двух формул теории пластин теория плит даёт точное решение иной задачи с $\sigma_r(a, z) = (1/20)(2 + \mu)(1 - 12z/h + 30z^2/h^2 - 20z^3/h^3)$; пригодно для $h/a \ll 1$, но не трёхмерности.)

Это сочет<u>а</u>нное (комбинированное) решение, что дал в итоге и <u>общий (полу)степенной метод</u>, получено <u>общим интегральным методом</u> сразу, естественно и без произвола.

Левая часть сложнейшего второго уравнения совместности деформаций в напряжениях $[- 3(1 - \mu)(2 + \mu)pr^2h^{-2}(1 - 2z/h)]$ аннулируется лишь на ос<u>и</u> и на срединной плоскости, так что полученное решение (рис. 3, а) является приближённым и нуждается в анализе его точности.

Общий интегральный метод даёт <u>общий метод естественной оценки погрешностей решений</u> по второму уравнению совместности – единственному, не обращаемому в тождество.

Естественная оценка погрешностей получаемых решений (как инвариант равносильного (эквивалентного) преобразования второго уравнения совместности деформаций его умножением на постоянный ненулевой коэффициент) даётся отношением равностепенн<u>ы</u>х между собой однородных функций левой части этого уравнения.

Исходя из интуитивных представлений о приближённом равенстве и основанной на них введённой всеобщей погрешности (ч<u>и</u>сла близки, если модуль их разности мал по сравнению с суммой их модулей), по принципу допустимой простоты примем, что оценка погрешности решения даётся оценочной дробью – отношением некоего среднего значения модуля левой части уравнения по объёму рассматриваемого трёхмерного т<u>е</u>ла к максимуму суммы модулей слагаемых той же части по тому же объёму. Среднее значение модуля произведения можно оценить произведением средних значений модулей сомножителей.

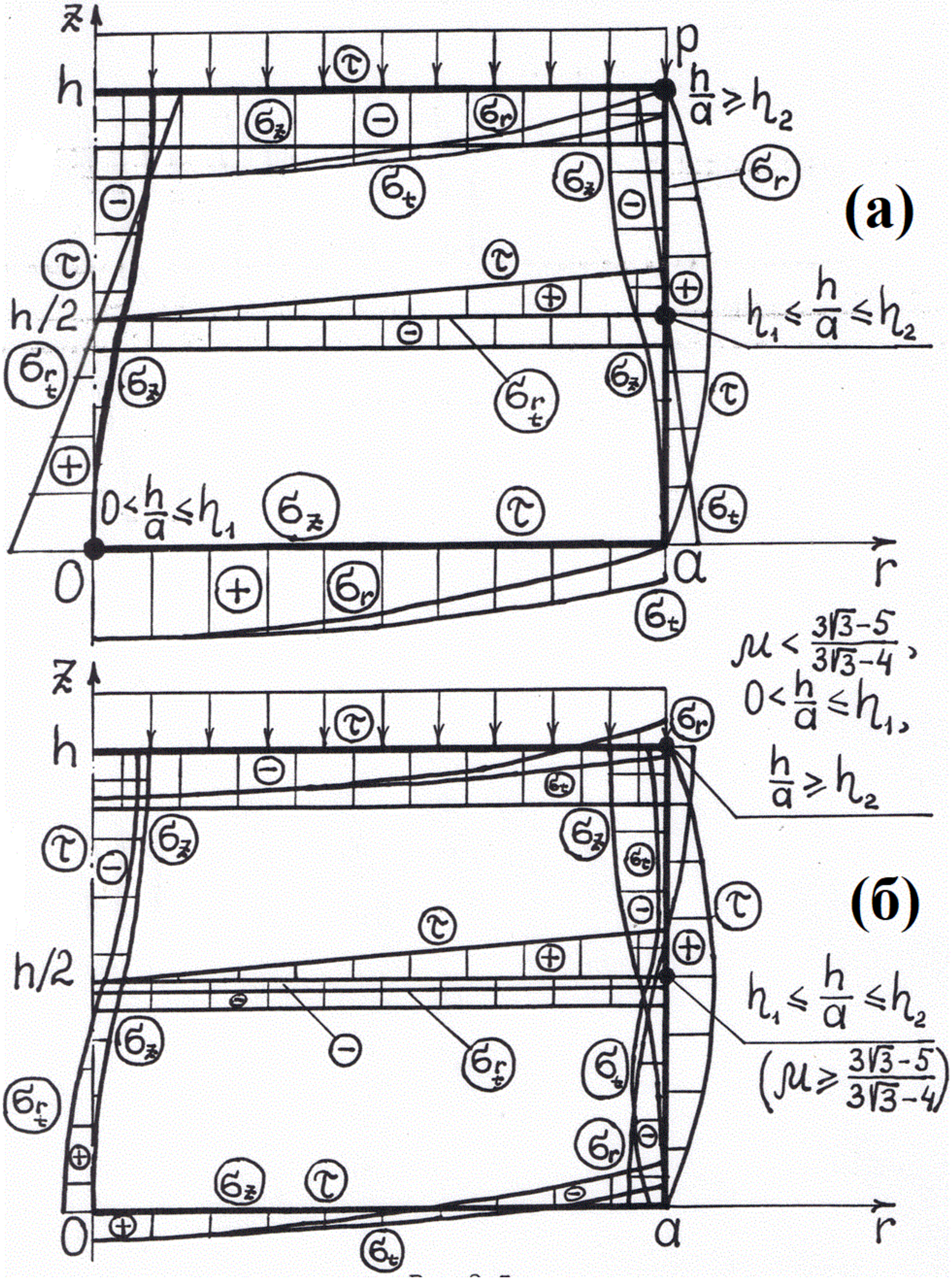



Рисунок 3. Эпюры напряжений и условия места (зачернённый кружок) наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения по третьей теории прочности в опёртом (а) и защемлённом (б) по боковой поверхности трёхмерных сплошных цилиндрических телах.

В левой части уравнения для определения числителя оценочной дроби не следует избегать приведения подобных, для определения знаменателя оценочной дроби нельзя приводить подобные разных знаков (взаимная компенсация влечёт кажущееся снижение точности), а при определении знаменателя не следует расщеплять цельные выражения типа $1 - \mu^2$ в каждой из формул для напряжений (это вело бы к мнимому повышению точности). Левая часть второго уравнения совместности после подстановки формул для напряжений и приведения подобных одинаковых знаков принимает вид $3prh^{-2}(1 - 2z/h)[\mu(3 + \mu) - 2(1 + \mu)]$. Общий метод естественной оценки погрешностей решений даёт по второму уравнению совместности погрешность сочетанного (комбинированного) решения как оценочную дробь

$$\underline{\delta}_\lambda = 3(1 - \mu)(2 + \mu)pr_{med}h^{-2}|1 - 2z/h|_{med}/\{3[\mu(3 + \mu) + 2(1 + \mu)]pr_{max}h^{-2}(1 + 2z/h)_{max}\},$$

причём в числителе $r_{med} = a/2$, $|1 - 2z/h|_{med} = 1/2$, а в знаменателе $r_{max} = a$, $(1 + 2z/h)_{max} = 3$.
В итоге независимо от размеров существенно трёхмерного упругого тела оценочная дробь

$$\underline{\delta}_\lambda = 12^{-1}(1 - \mu)(2 + \mu)/(2 + 5\mu + \mu^2) \le 1/12.$$

При любых значениях отношения h/a универсальна инженерная точность данного решения (погрешность до 8.3 %, а при $\mu = 0.21;\ 0.3;\ 0.37$ для неорганического стекла, стали и органического стекла соответственно до 4.72; 3.74; 3.12 %).
Приведём результаты решения задачи прочности для стального тела ($\mu = 0.3$). При

$$0 < h/a \le \eta_1 = 4^{-1}(3 + \mu)2^{1/2}\{1 + [1 + (3 + \mu)^2/36]^{1/2}\}^{-1/2} \approx 0.7973 \approx (3 + \mu)/4$$

наибольшее равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности

$$\sigma_{emax}(r, z) = \sigma_e(0, 0) = \sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0) = (3/8)(3 + \mu)pa^2/h^2 \le \sigma_s,$$

предел упругого сопротивления (давление начала текучести) и допускаемое давление

$$p_s = 8[3(3 + \mu)]^{-1}\sigma_s h^2/a^2,\ [p] = 8[3(3 + \mu)]^{-1}[\sigma]h^2/a^2,$$

$$[\sigma] = \min\{\sigma_s/n_s;\ \sigma_u/n_u\} = \min\{\sigma_s/1.5;\ \sigma_u/2.4\}.$$

Аналогично при $\eta_1 \le h/a \le \eta_2 = 3^{1/2}(1 - \mu)[10 - 4\mu - (88 - 56\mu + 4\mu^2)^{1/2}]^{-1/2} \approx 2.077$
наибольшее равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности

$$\sigma_{emax}(r, z) = \sigma_e(a, h/2) = (1 + 9a^2/h^2)^{1/2}p/2 \le \sigma_s,$$

предел упругого сопротивления (давление начала текучести) и допускаемое давление

$$p_s = 2(1 + 9a^2/h^2)^{-1/2}\sigma_s,\ [p] = 2(1 + 9a^2/h^2)^{-1/2}[\sigma].$$

При $h/a \ge \eta_2$ наибольшее равносильное напряжение по третьей теории прочности

$$\sigma_{emax}(r, z) = \sigma_e(a, h) = [1 - (3/4)(1 - \mu)a^2/h^2]p \le \sigma_s,$$

предел упругого сопротивления (давление начала текучести) и допускаемое давление

$$p_s = \sigma_s/[1 - (3/4)(1 - \mu)a^2/h^2],\ [p] = [\sigma]/[1 - (3/4)(1 - \mu)a^2/h^2].$$

Итак, существуют два критических значения $\eta_1$ и $\eta_2$ отношения h/a с перемещениями опасной точки из центра свободного от нагрузок внутреннего основания на середину боковой поверхности и далее на край нагруженного равномерным давлением внешнего основания.
В задаче (рис. 3, б) о жёстком защемлении по боковой поверхности r = a именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического упругого тела $0 \le r \le a$, $0 \le z \le h$ под давлением p на внешнее основание z = h с $\sigma_z(r, h) = - p$ при свободном внутреннем основании z = 0 взамен условий защемления $u_r(a, z) = 0$, $u_z(a, z) = 0$ теория пластин и теория плит аннулируют наклон краевой нормали или среднее радиальное перемещение её точек. Общий интегральный метод при простейшем статически возможном параболическом сдвиговом напряжении $\tau_{rz}(a, z) = 3p(z/h - z^2/h^2)a/h$ при r = a даёт формулы теории плит для осевого и сдвигового напряжений

$$\sigma_z(r, z) = p(- 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3),\ \tau_{rz}(r, z) = 3p(z/h - z^2/h^2)r/h,$$

формулы для радиального и осевого перемещений

$$u_r(r, z) = (3/8)(1 - \mu^2)(a^2 - r^2)h^{-2}(1 - 2z/h)pr/E,\ u_z(r, z) = \{- (3/2)\mu[(2 + \mu)a^2 - 2(1 + \mu)r^2]h^{-2}(z/h - z^2/h^2)$$
$$- (1/2)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 - \mu)^{-1}(2z^3/h^3 - z^4/h^4) - (3/16)(1 - \mu^2)(a^2 - r^2)^2h^{-4}\}hp/E$$

и формулы для радиального и тангенциального (окружного) напряжений

$$\sigma_r(r, z) = \{(3/8)[(1 + \mu)a^2 - (3 + \mu)r^2]h^{-2}(1 - 2z/h) - \mu(1 - \mu)^{-1}(3z^2/h^2 - 2z^3/h^3)\}p,$$
$$\sigma_t(r, z) = \{(3/8)[(1 + \mu)a^2 - (1 + 3\mu)r^2]h^{-2}(1 - 2z/h) - \mu(1 - \mu)^{-1}(3z^2/h^2 - 2z^3/h^3)\}p.$$

Левая часть второго уравнения совместности деформаций в напряжениях составляет

$$6prh^{-2}(1 - 2z/h)[- (3/8)\mu/(1 - \mu) + (3/8)\mu^2/(1 - \mu) + \mu - (1 + \mu) + (1/2)\mu(1 + \mu)].$$

Независимо от размеров тела оценочная дробь всеобщей погрешности полученного решения

$$\underline{\delta}_\lambda = (1/12)(1 - \mu/8 - \mu^2/2)/[1 + 2\mu + (1/8)\mu(1 + \mu)(7 - 4\mu)/(1 - \mu)] \le 1/12$$

даёт универсальную по h/a инженерную точность (до 8.3 %, а при $\mu = 0.21;\ 0.3;\ 0.37$ для неорганического стекла, стали и органического стекла соответственно до 4.76; 3.82; 3.21 %). Промежуточные плоскости, параллельные основаниям, искривляются сильнее оснований, особенно срединная плоскость жёстко защемлённого именно существенно трёхмерного тела.

Формулы для радиального $\sigma_r(r, z)$ и окружного $\sigma_t(r, z)$ напряжений обобщают и уточняют таковые в теории пластин, отличаясь вычитаемыми в фигурных скобках, нетождественными поправкам теории плит и будучи, по-видимому, более точными, поскольку условия защемления боковой поверхности выполнены намного точнее, чем в теории плит.

Если в задаче прочности $\mu \le \mu_1 = (3^{3/2} - 5)/(3^{3/2} - 4) \approx 0.1640$, то при любых h/a, а если $\mu \ge \mu_1 = (3^{3/2} - 5)/(3^{3/2} - 4) \approx 0.1640$, то при любом из двух дополнительных условий

$$0 < h/a \le \eta_1 = (3/2)^{1/2}\{3 - 2(1 - 2\mu)/(1 - \mu) + [9 - 12(1 - 2\mu)/(1 - \mu) + (1 - 2\mu)^2/(1 - \mu)^2]^{1/2}\}^{-1/2} \approx 0.6595,$$

$$h/a \ge \eta_2 = (3/2)^{1/2}\{3 - 2(1 - 2\mu)/(1 - \mu) - [9 - 12(1 - 2\mu)/(1 - \mu) + (1 - 2\mu)^2/(1 - \mu)^2]^{1/2}\}^{-1/2} \approx 2.291$$

(приближённые числа при $\mu = 0.3$ для стали) равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности максимально на краю внешнего основания

$$\sigma_{emax}(r, z) = \sigma_e(a, h) = [(1 - 2\mu)/(1 - \mu) + (3/4)a^2/h^2]p \le \sigma_s,$$

предел упругого сопротивления (давление начала текучести) и допускаемое давление

$$p_s = [(1 - 2\mu)/(1 - \mu) + (3/4)a^2/h^2]^{-1}\sigma_s, [p] = [(1 - 2\mu)/(1 - \mu) + (3/4)a^2/h^2]^{-1}[\sigma],$$

$$[\sigma] = \min\{\sigma_s/n_s; \sigma_u/n_u\} = \min\{\sigma_s/1.5; \sigma_u/2.4\}.$$

Если $\mu \ge \mu_1 = (3^{3/2} - 5)/(3^{3/2} - 4) \approx 0.1640$, то при $\eta_1 \le h/a \le \eta_2$ равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности максимально посредине боковой поверхности

$$\sigma_{emax}(r, z) = \sigma_e(a, h/2) = (1/2)[(1 - 2\mu)^2/(1 - \mu)^2 + 9a^2/h^2]^{1/2}p/2 \le \sigma_s,$$

предел упругого сопротивления (давление начала текучести) и допускаемое давление

$$p_s = 2[(1 - 2\mu)^2/(1 - \mu)^2 + 9a^2/h^2]^{-1/2}\sigma_s, [p] = 2[(1 - 2\mu)^2/(1 - \mu)^2 + 9a^2/h^2]^{-1/2}[\sigma].$$

В этой задаче при условии $\mu \ge \mu_1 = (3^{3/2} - 5)/(3^{3/2} - 4) \approx 0.1640$ имеются тоже два критических значения $\eta_1$ и $\eta_2$ отношения h/a с редким случаем возврата области наибольших напряжений.

Общий интегральный метод позволяет прямым алгоритмом решать задачу для целого тела сложной конфигурации как единственного канонического/неканонического макроэлемента.

Анализ равновесия конической переходной части в мультипликаторе давлений приводит к задаче для трёхмерного усечённого конуса $0 \le z \le h$, $0 \le r \le a + (b - a)z/h$ $(b \ge a)$ (рис. 4).

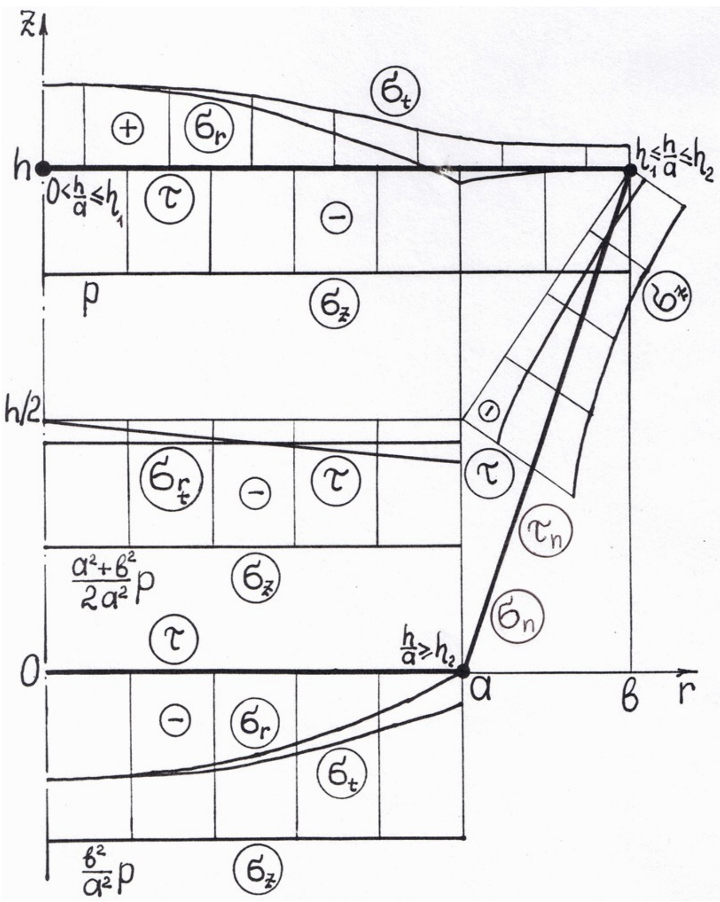



Рисунок 4. Эпюры напряжений и условия места (зачернённый кружок) наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения по третьей теории прочности в сжатом равномерными давлениями на торцы трёхмерном упругом теле в форме усечённого конуса.

Сжатие усечённого конуса равномерными давлениями $p$ и $pb^2/a^2$ на основания $z = h$ и $z = 0$ с соответствующим осевым напряжением на основаниях $\sigma_z(r, 0) = - pb^2/a^2$ $(0 \le r \le a)$, $\sigma_z(r, h) = - p$ $(0 \le r \le b)$ при простейшем статически возможном параболическом осевом распределении сдвигового напряжения даёт разветвлённые формулы для сдвигового напряжения в конусе

$$\tau_{rz}(r, z) = - 3p(b^2/a^2 - 1)(r/h)(z/h)(1 - z/h),\ 0 \le r \le a;$$

$$\tau_{rz}(r, z) = - 3p(b - a)^3(b - r)^{-2}(b + r)h^{-1}r^{-1}[z/h - (r - a)/(b - a)](1 - z/h),\ a \le r \le b.$$

Из второго уравнения равновесия и с учётом граничных условий на сжатых основаниях и не нагруженной боковой поверхности определяется осевое напряжение в усечённом конусе

$$\sigma_z(r, z) = p[- b^2/a^2 + (b^2/a^2 - 1)(3z^2/h^2 - 2z^3/h^3)],\ 0 \le r \le a;$$

$$\sigma_z(r, z) = p\{- 1 + (3/2)(b - a)^2(b - r)^{-2}(b + r)r^{-1}(1 - z/h)^2 - (1/2)(b - a)^3(b - r)^{-3}(3b + r)r^{-1}(1 - z/h)^2[1 + 2z/h - 3(r - a)/(b - a)\},\ a < r \le b.$$

Из первого уравнения равновесия и из первого уравнения совместности деформаций устанавливаются радиальное $\sigma_r(r, z)$ и тангенциальное (окружное) $\sigma_t(r, z)$ напряжения:

в центральной части $0 \le r \le a$ усечённого конуса

$$\sigma_r(r, z) = p\{(1/2)\mu(b^2 - a^2)a^{-1}(- 1 + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3) + (3/8)(3 + \mu)(b^2/a^2 - 1)(r^2/h^2)(1 - 2z/h) + (1/2)\mu(b - a)[a + b + (b - a)z/h](1 - z/h)/[a + (b - a)z/h]^2 - (3/8)(1 - \mu)(b^2 - a^2)(a^2/h^2)(1 - 2z/h)/[a + (b - a)z/h]^2 - (3/4)(1 + \mu)(b^2 - a^2)h^{-2}(1 - 2z/h) - (3/2)(1 - \mu)(b - a)^2h^{-1}(1 - z/h)[a + (b - a)z/h]^{-2}[az/h + (2b - a - (b - a)(z/h))\ln(1-z/h)^{-1}] - (3/2)(1+\mu)(1 - a/b)^2h^{-1}(1 - z/h)[bz/h+(a+(b - a)z/h)\ln((1+(b - a)a^{-1}z/h)(1 - z/h)^{-1})]\};$$

$$\sigma_t(r, z) = p\{(1/2)\mu(b^2 - a^2)a^{-1}(- 1 + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3) + (3/8)(1 + 3\mu)(b^2/a^2 - 1)(r^2/h^2)(1 - 2z/h) + (1/2)\mu(b - a)[a + b + (b - a)z/h](1 - z/h)/[a + (b - a)z/h]^2 - (3/8)(1 - \mu)(b^2 - a^2)(a^2/h^2)(1 - 2z/h)/[a + (b - a)z/h]^2 - (3/4)(1 + \mu)(b^2 - a^2)h^{-2}(1 - 2z/h) - (3/2)(1 - \mu)(b - a)^2h^{-1}(1 - z/h)[a + (b - a)z/h]^{-2}[az/h + (2b - a - (b - a)(z/h))\ln(1-z/h)^{-1}] - (3/2)(1+\mu)(1 - a/b)^2h^{-1}(1 - z/h)[bz/h+(a+(b - a)z/h)\ln((1+(b - a)a^{-1}z/h)(1 - z/h)^{-1})]\};$$

в периферической части $a < r \le b$ усечённого конуса

$$\sigma_r(r, z) = p\{(1/2)\mu(b - a)(1 - z/h)[(a + b + (b - a)z/h)/(a + (b - a)z/h)^2 - (b - a)^2(b - r)^{-2}(b + r)r^{-2}(1 - z/h)(1 + 2z/h - 3(r - a)/(b - a))] + (3/8)(1 - \mu)(b^2 - a^2)(a^2/h^2)[1/r^2 - 1/(a + (b - a)z/h)^2](1 - 2z/h) + (3/2)(1 - \mu)(b - a)^2h^{-1}(1 - z/h)[r^{-2}(r - a)(b - r)^{-1}(r - bz/h) + r^{-2}(2b - a - (b - a)z/h)\ln((b - a)/(b - r)) - (az/h + (2b - a - (b - a)z/h)\ln(1 - z/h)^{-1})/(a + (b - a)z/h)^2] + (3/2)(1 + \mu)(1 - a/b)^2h^{-1}(1 - z/h)[b(r - a)(b - r)^{-1} - b(b - a)(b - r)^{-1}z/h + (a + (b - a)z/h)\ln(r(b - a)(b - r)^{-1}(1 - z/h)(a + (b - a)z/h)^{-1})]\};$$

$$\sigma_t(r, z) = p\{(1/2)\mu(b - a)(1 - z/h)[(a + b + (b - a)z/h)/(a + (b - a)z/h)^2 + (b - a)^2(b - r)^{-3}(b^2 + 3br + 4r^2)r^{-2}(1 - z/h)(1 + 2z/h - 3(r - a)/(b - a)) + 3(b - a)(b - r)^{-2}(b + r)r^{-1}(1 - z/h)] - (3/8)(1 - \mu)(b^2 - a^2)(a^2/h^2)[1/r^2 + 1/(a + (b - a)z/h)^2](1 - 2z/h) + (3/2)(1 - \mu)(b - a)^2h^{-1}r^{-1}(1 - z/h)[(ab - 2ar + r^2)r^{-1}(b - r)^{-2}(r - bz/h) + (r - a)/(b - r) + (2b - a - (b - a)z/h)((b - r)^{-1} - r^{-1}\ln((b - a)/(b - r))) - r(az/h + (2b - a - (b - a)z/h)\ln(1 - z/h)^{-1})/(a + (b - a)z/h)^2] + (3/2)(1 + \mu)(1 - a/b)^2h^{-1}(1 - z/h)[- b(b - r)^{-2}(r^2 - 2br + ab + b(b - a)z/h) + (a + (b - a)z/h)(b(b - r)^{-1} + \ln(r(b - a)(b - r)^{-1}(1 - z/h)(a + (b - a)z/h)^{-1}))] - 3(b - a)^3(b + r)(b - r)^{-2}h^{-2}[(b + r - 2a)/(b - a) - 2z/h]\}.$$

Логарифмические особенности при $z \to h - 0$ – кажущиеся: $\lim_{z \to h - 0}(1 - z/h)\ln(1 - z/h)^{-1} = 0$.

В пределе при $b \to a + 0$ решение стремится к элементарному для равномерно сжатого по основаниям именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела.

Конусность не нагруженной боковой поверхности влечёт отсутствующие при $b = a$ изгибные эффекты. Формулы для радиального и тангенциального (окружного) напряжений $(0 \le r \le a)$

$$\sigma_r(r, 0) = - (3/8)(3 + \mu)p(b^2 - a^2)h^{-2}(1 - r^2/a^2);\ \sigma_t(r, 0) = - (3/8)p(b^2 - a^2)h^{-2}[3 + \mu - (1 + 3\mu)r^2/a^2] –$$

и на сжатом основании опёртого по краю трёхмерного сплошного цилиндрического тела $0 \le r \le a$, $0 \le z \le h$ под давлением $p(b^2 - a^2)/a^2$ на это основание или давлениями на оба основания.

Для верхнего основания $z = h$ взамен тождества имеет место аналогия:

в центральной части $0 \le r \le a$ усечённого конуса

$$\sigma_r(r, h) = (3/8)p(b^2 - a^2)h^{-2}[2(1 + \mu) + (1 - \mu)a^2/b^2 - (3 + \mu)r^2/a^2];$$

$$\sigma_t(r, h) = (3/8)p(b^2 - a^2)h^{-2}[2(1 + \mu) + (1 - \mu)a^2/b^2 - (1 + 3\mu)r^2/a^2];$$

в периферической части $a < r \le b$ усечённого конуса

$$\sigma_r(r, h) = - (3/8)(1 - \mu)p(b^2 - a^2)h^{-2}a^2b^{-2}(b^2 - r^2)/r^2;\ \sigma_t(r, h) = (3/8)(1 - \mu)p(b^2 - a^2)h^{-2}a^2b^{-2}(b^2 + r^2)/r^2.$$

Плоская часть $0 \le r \le a$, $z = h/2$ срединной поверхности является изоповерхностью радиального $\sigma_r(r, z)$, тангенциального (окружного) $\sigma_t(r, z)$ и осевого $\sigma_z(r, z)$ напряжений

$$\sigma_r(r, h/2) = p\{- (1/4)\mu(b/a - 1)^2(a^2 + 4ab + b^2)/(a + b)^2 - (3/2)(1 - \mu)(b - a)^2(b + a)^{-2}[a + (3b - a)\ln 2]/h - (3/8)(1 + \mu)(1 - a/b)^2h^{-1}[b + (a + b)\ln(1 + b/a)]\};$$

$$\sigma_t(r, h/2) = p\{- (1/4)\mu(b/a - 1)^2(a^2 + 4ab + b^2)/(a + b)^2 - (3/2)(1 - \mu)(b - a)^2(b + a)^{-2}[a + (3b - a)\ln 2]/h - (3/8)(1 + \mu)(1 - a/b)^2h^{-1}[b + (a + b)\ln(1 + b/a)]\};\ \sigma_z(r, h/2) = - p(a^2 + b^2)/(2a^2).$$

Это не так на конической части $a \le r \le b$, $z = [1 + (r - a)/(b - a)]h/2$ срединной поверхности и на продолжении плоской части срединной поверхности. Осевое напряжение $\sigma_z\{r, [1 + (r - a)/(b - a)]h/2\} = - p(3b + 7r)/(8r)$, сдвиговое $\tau_{rz}\{r, [1 + (r - a)/(b - a)]h/2\} = - (3/4)p(b - a)(b + r)/(hr)$ и в точке (b, h) его непрерывность нарушена: не существует единый предел $\lim_{r \to b - 0,\, z \to h - 0}\tau_{rz}(r, z)$, зависящий от пути приближения к этой точке и изменяющийся от минимума $[- (3/2)p(b - a)/h]$ на конической части срединной поверхности до нулевого максимума на верхнем основании и на боковой поверхности. Эта единственная особенность противоречит и граничному условию $\tau_{rz}(b, h) = 0$, но практически не значима: любая острая кромка имеет закругление.

В задаче прочности (по третьей теории прочности) сплошного трёхмерного усечённого конического т<u>е</u>ла (см. рис. 4) существует для отношения h/a первое критическое значение

$$\eta_1 = (2^{3/2}/3)\{(3/4)(b^2/a^2 - 1)[2(1 + \mu) + (1 - \mu)a^2/b^2] - (15/8)(1 - \mu)(1 - a^2/b^2) - 9(b/a - 1)^2 + [[(3/4)(b^2/a^2 - 1)(2(1 + \mu) + (1 - \mu)a^2/b^2) - (15/8)(1 - \mu)(1 - a^2/b^2) - 9(b/a - 1)^2]^2 + (81/256)(b^2/a^2 - 1)^2[(2(1 + \mu) + (1 - \mu)a^2/b^2)^2 - 4(1 - \mu)^2a^4/b^4]]^{1/2}\}^{1/2},$$

а при $b/a > 5^{1/2}/2 \approx 1.118$ ($\mu = 0.3$ для стали) существует и второе критическое значение

$$\eta_2 = \{9(b/a - 1)^2 + (15/8)(1 - \mu)(1 - a^2/b^2) + [[9(b/a - 1)^2 + (15/8)(1 - \mu)(1 - a^2/b^2)]^2 + (9/4)(1 - \mu)^2(1 - a^2/b^2)^2(b^4/a^4 - 25/16)]^{1/2}\}^{1/2}/[2(b^4/a^4 - 25/16)]^{1/2},$$

превышение которых влечёт скачк<u>и</u> м<u>е</u>ста $\sigma_{emax}(r, z)$ из центра (0, h) большего основания на его край (b, h) и с кр<u>а</u>я (b, h) большего основания на край (a, 0) меньшего основания, причём

$$\sigma_e(0, h) = p\{1 + (3/8)(b^2 - a^2)h^{-2}[2(1 + \mu) + (1 - \mu)a^2/b^2]\};$$

$$\sigma_e(b, h) = p\{[5/4 + (3/4)(1 - \mu)(b^2 - a^2)h^{-2}a^2/b^2]^2 + 9(b - a)^2h^{-2}\}^{1/2};\ \sigma_e(a, 0) = pb^2/a^2.$$

Приравнивание соответствующего наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения $\sigma_{emax}(r, z)$ предельному $\sigma_L$ или допускаемому $[\sigma]$ напряжению даёт предельное $p_L$ и допускаемое [p] значения давления p, что и завершает решение задачи прочности.

Созданы <u>общая теория предельных состояний</u> и <u>общая теория прочности</u> с общей методологией учёта действительных соотношений прочностн<u>ы</u>х свойств материалов, с общей методологией приведения главных напряжений к всеобщим напряжениям и с общей методологией приведения критериев предельных состояний и прочности впервые к всеобщим прочностн<u>ы</u>м законам природы для произвольно анизотропных тел с различными сопротивлениями растяжениям и сжатиям при любых переменных нагружениях с возможными вращениями главных направлений напряжённого состояния.

Автор в своей кандидатской диссертации (Гелимсон Лев Г. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06. Киев: Ин-т проблем прочности АН УССР, 1987. 148 с.) необходимо для определения опаснейшей точки преобразовал к виду с эквивалентным напряжением $\sigma_e$ первую теорию прочности (критерий наибольших нормальных напряжений) да-Винчи–Галилея–Лейбница–Ламе для изотропного материала с равной прочностью $\sigma_L$ при растяжении $\sigma_t$ и при сжатии $\sigma_c$

$$\sigma_e = \max\{|\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3|\} = \sigma_L,\ \sigma_e = \max\{|\sigma_j|; j = 1; 2; 3\} = \sigma_L\ (\sigma_L = \sigma_t = \sigma_c = |-\sigma_c|)$$

и с различной прочностью $\sigma_t$ при растяжении и $\sigma_c$ при сжатии $\sigma_e = \max\{\sigma_1; - \chi\sigma_3\} = \sigma_t$, $\chi = \sigma_t/\sigma_c$. Неизвестны критерии предельных состояний анизотропного различно сопротивляющегося растяжениям и сжатиям материала при произвольном переменном нагружении. Тем самым общепризнано полное отсутствие известных всеобщих прочностн<u>ы</u>х законов природы.

<u>Общий метод физического (знакочувствительного скалярно-векторного) обобщения критериев предельных состояний циклическим моделированием постоянно неупорядоченно пронумерованных программ переменных главных напряжений</u> приводит каждое главное напряжение $\sigma_{ju}(t)$ при постоянной нумерации (ju = 1; 2; 3) безотносительно упорядоченности алгебраических величин всех трёх главных напряжений путём его деления на модуль $|\sigma_{Lju}(t)|$ предельного его значения $\sigma_{Lju}(t)$ тех же направления и знака в тот же момент времени t в той же точке того же т<u>е</u>ла при одноосном напряжённом состоянии (аннулировании двух остальных главных напряжений) и прочих равных условиях нагружения к соответствующему всеобщему главному напряжению: $\sigma_{ju}^\circ(t) = \sigma_{ju}(t)/|\sigma_{Lju}(t)| = 1/[|\sigma_{Lju}(t)|/\sigma_{ju}(t)] = 1/r_{ju}^\circ(t)$, $r_{ju}^\circ(t) = |$

$\sigma_{Lju}(t)|/\sigma_{ju}(t)$ есть обобщённый (равный обычному $|\sigma_{Lju}(t)|/|\sigma_{ju}(t)|$, умноженному на знак $\mathrm{sign}[\sigma_{ju}(t)]$ главного напряжения $\sigma_{ju}(t)$) одноосный запас главного напряжения $\sigma_{ju}(t)$.
При единственной постоянной $\sigma_L$ изотропного одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию материала любой критерий предельных состояний представим в виде $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$, где $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ – функция главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, однородная первого порядка относительно главных напряжений и для любого одноосного напряжения равная его модулю.
Третья теория прочности $\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_L$ включает единственную постоянную материала $\sigma_L$ и непригодна для изотропного материала с различными положительными $\sigma_t$ и $\sigma_c$. Простейший путь необходимого избавления критерия предельных состояний от $\sigma_L$, как показывают теории подобия и размерностей, есть деление всех главных напряжений в критерии на $\sigma_L$:
$$\sigma_e{}^\circ = \sigma_e/\sigma_L = 1/(\sigma_L/\sigma_e) = 1/r_e{}^\circ,\ r_e{}^\circ = \sigma_L/\sigma_e;\ \sigma_1{}^\circ = \sigma_1/\sigma_L = 1/(\sigma_L/\sigma_1) = 1/r_1{}^\circ,\ r_1{}^\circ = \sigma_L/\sigma_1;$$
$$\sigma_2{}^\circ = \sigma_2/\sigma_L = 1/(\sigma_L/\sigma_2) = 1/r_2{}^\circ,\ r_2{}^\circ = \sigma_L/\sigma_2;\ \sigma_3{}^\circ = \sigma_3/\sigma_L = 1/(\sigma_L/\sigma_3) = 1/r_3{}^\circ,\ r_3{}^\circ = \sigma_L/\sigma_3;$$
$$\sigma_L{}^\circ = \sigma_L/\sigma_L = 1 = 1/(\sigma_L/\sigma_L) = 1/r_L{}^\circ,\ r_L{}^\circ = \sigma_L/\sigma_L = 1.$$
Это приведение обобщается следующим приведением для изотропного материала с $\sigma_t \neq \sigma_c$:
$$\sigma_j{}^\circ = \sigma_j/\sigma_t = 1/(\sigma_t/\sigma_j) = 1/r_j{}^\circ,\ r_j{}^\circ = \sigma_t/\sigma_j,\ \sigma_j \geq 0;\ \sigma_j{}^\circ = \sigma_j/\sigma_c = 1/(\sigma_c/\sigma_j) = 1/r_j{}^\circ,\ r_j{}^\circ = \sigma_c/\sigma_j,\ \sigma_j \leq 0;$$
$$j = 1;\ 2;\ 3;\ \sigma_e{}^\circ = \sigma_e/\sigma_t = 1/(\sigma_t/\sigma_e) = 1/r_e{}^\circ,\ r_e{}^\circ = \sigma_t/\sigma_e.$$
Приведённая третья теория прочности $\sigma_e{}^\circ = \sigma_1{}^\circ - \sigma_3{}^\circ = 1$, $1/r_e{}^\circ = 1/r_1{}^\circ - 1/r_3{}^\circ = 1$ не содержит постоянных материала и может прилагаться к любым видам материалов и нагружений при условии придания приемлемого смысла приведённым главным напряжениям $\sigma_j{}^\circ = 1/r_j{}^\circ$.
Обобщение третьей теории прочности даёт в размерных главных напряжениях $\sigma_j$ с учётом их знаков при равносильном (эквивалентном) напряжении $\sigma_{et}$ ($\sigma_{ec}$) для сравнения с $\sigma_t$ ($\sigma_c$)
$$\sigma_{et} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t\ (\sigma_3 \geq 0),\ \sigma_{ec} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c = |-\sigma_c|\ (\sigma_1 \leq 0),\ \sigma_{et} = \sigma_1 - \chi\sigma_3 = \sigma_t\ (\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_3),$$
первые два критерия неизвестны, но естественны, а третий – критерий Кулона–Мора.
Приведение произвольного критерия предельных состояний $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$ даёт приведённый произвольный критерий $\sigma_e{}^\circ = F(\sigma_1{}^\circ, \sigma_2{}^\circ, \sigma_3{}^\circ) = 1$, $1/r_e{}^\circ = F(1/r_1{}^\circ, 1/r_2{}^\circ, 1/r_3{}^\circ) = 1$.
$$\sigma_{e|q|} = |q|\sigma_e{}^\circ = F(q\sigma_1{}^\circ, q\sigma_2{}^\circ, q\sigma_3{}^\circ) = |q|,\ \sigma_{eq} = q\sigma_e{}^\circ = F(q\sigma_1{}^\circ, q\sigma_2{}^\circ, q\sigma_3{}^\circ) = q\ (q > 0).$$
При единственной постоянной $\sigma_L$ $q = \sigma_L$. При $\sigma_c \neq \sigma_t$ различны q, в частности $\sigma_c$, $\sigma_t$, $(\sigma_c\sigma_t)^{1/2}$, $\sigma_c + \sigma_t$, $\sigma_c\sigma_t/(\sigma_c + \sigma_t)$. При анизотропии материала с различными сопротивлениями растяжениям и сжатиям в направлениях упорядоченных $\sigma_j$ или неупорядоченных $\sigma_{ju}$ главных напряжений множителю q и его значениям присваиваются следующие дополнительные индексы, в частности: $q_{(j(u))}$, $\sigma_{c(j(u))}$, $\sigma_{t(j(u))}$, $(\sigma_{c(j(u))}\sigma_{t(j(u))})^{1/2}$, $\sigma_{c(j(u))} + \sigma_{t(j(u))}$, $\sigma_{c(j(u))}\sigma_{t(j(u))}/(\sigma_{c(j(u))} + \sigma_{t(j(u))})$.
Четвёртая теория прочности $\sigma_e = \sigma_i = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_L$ приведена к
$$\sigma_e{}^\circ = \sigma_i{}^\circ = 2^{-1/2}[(\sigma_1{}^\circ - \sigma_2{}^\circ)^2 + (\sigma_2{}^\circ - \sigma_3{}^\circ)^2 + (\sigma_3{}^\circ - \sigma_1{}^\circ)^2]^{1/2} = 1,$$
$$1/r_e{}^\circ = 1/r_i{}^\circ = 2^{-1/2}[(1/r_1{}^\circ - 1/r_2{}^\circ)^2 + (1/r_2{}^\circ - 1/r_3{}^\circ)^2 + (1/r_3{}^\circ - 1/r_1{}^\circ)^2]^{1/2} = 1,$$
где $\sigma_i$, $\sigma_i{}^\circ$ – интенсивность и приведённая интенсивность напряжений соответственно.
В размерных главных напряжениях $\sigma_j$ приведённая четвёртая теория прочности в приведённых напряжениях $\sigma_j{}^\circ$ меняет свои выражения в зависимости от сочетаний знаков $\sigma_j$:
$$\sigma_{et} = \sigma_{it} = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_t\ (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0);$$
$$\sigma_{et} = \sigma_{it} = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \chi\sigma_3)^2 + (\chi\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_t\ (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3);$$
$$\sigma_{et} = \sigma_{it} = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \chi\sigma_2)^2 + (\chi\sigma_2 - \chi\sigma_3)^2 + (\chi\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_t\ (\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3);$$
$$\sigma_{et} = \sigma_{it} = 2^{-1/2}[(\chi\sigma_1 - \chi\sigma_2)^2 + (\chi\sigma_2 - \chi\sigma_3)^2 + (\chi\sigma_3 - \chi\sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_t\ (0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$
$$\{\sigma_{ec} = \sigma_{ic} = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_c\ (0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)\}.$$
При любых $\sigma_1$ и $\sigma_3$ и дополнительном условии $\sigma_2 \in \{\sigma_1, \sigma_3\}$ приведённая третья теория прочности и приведённая четвёртая теория прочности совпадают, что частично проверяет их уточняющим учётом $\sigma_2$. Их предельные поверхности равнонаклонны к осям – в приведённых напряжениях $\sigma_j{}^\circ$ обычные бесконечные правильная шестигранная призматическая и описанная цилиндрическая поверхности, а в обычных размерных напряжениях $\sigma_j$ трёхчастны: две полубесконечные цилиндрические поверхности радиусами $(2/3)^{1/2}\sigma_t$ при $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \geq \sigma_t$ и $(2/3)^{1/2}\sigma_c$ при $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \leq -\sigma_c$, что естественно, соединены промежуточной усечённой конической поверхностью и во все последние три поверхности вписаны шестигранные поверхности – две полубесконечные призматические поверхности и промежуточная усечённая пирамидальная поверхность (местны нарушения выпуклости).

Критерий Хосфорда $\sigma_e = 2^{-1/H}[(\sigma_1 - \sigma_2)^H + (\sigma_2 - \sigma_3)^H + (\sigma_1 - \sigma_3)^H]^{1/H} = \sigma_L$ приведён к

$$\sigma_e{}^\circ = 2^{-1/H}[(\sigma_1{}^\circ - \sigma_2{}^\circ)^H + (\sigma_2{}^\circ - \sigma_3{}^\circ)^H + (\sigma_1{}^\circ - \sigma_3{}^\circ)^H]^{1/H} = 1,$$

$$1/r_e{}^\circ = 2^{-1/H}[(1/r_1{}^\circ - 1/r_2{}^\circ)^H + (1/r_2{}^\circ - 1/r_3{}^\circ)^H + (1/r_1{}^\circ - 1/r_3{}^\circ)^H]^{1/H} = 1$$

как обобщению приведённой третьей теории прочности, получаемой при H = 1,
и как обобщению приведённой четвёртой теории прочности, получаемой при H = 2,
изображаемому промежуточной предельной поверхностью при 1 < H < 2.

Для изотропного материала приведение не меняет упорядоченности главных напряжений по алгебраическим величинам, то есть из $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$ следует $\sigma_1{}^\circ \ge \sigma_2{}^\circ \ge \sigma_3{}^\circ$. Для анизотропного материала может потребоваться перенумерация приведённых главных напряжений.

С учётом приведённых первой и четвёртой теорий прочности линейный критерий Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева $\sigma_e = (1 - \chi)\sigma_1 + 2^{-1/2}\chi[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} = \sigma_t$ приведён к $\sigma_e{}^\circ = (1 - \chi)\max\{|\sigma_j{}^\circ|; j = 1; 2; 3\} + 2^{-1/2}\chi[(\sigma_1{}^\circ - \sigma_2{}^\circ)^2 + (\sigma_2{}^\circ - \sigma_3{}^\circ)^2 + (\sigma_1{}^\circ - \sigma_3{}^\circ)^2]^{1/2} = 1$.

Для объяснения продольного раскалывания одноосно сжимаемых образцов из хрупких материалов без растягивающих главных напряжений общий метод правильного учёта непременно положительных алгебраически наибольших главных напряжения и деформации сочетает с произвольным критерием предельных состояний единственно подходящую из классических вторую теорию прочности (критерий наибольших нормальных деформаций) Мариотта–Сен-Венана, причём её и в общем случае дополнительно (по сравнению с единой теорией прочности Я. Б. Фридмана) первую теорию прочности (критерий наибольших нормальных напряжений) при необходимом и достаточном условии положительности максимума $\sigma$ из алгебраически наибольшего главного напряжения $\sigma_1$ по первой теории прочности и из чисто расчётного (фиктивного) напряжения $\sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)$, дающего при чисто расчётном (фиктивном) одноосном напряжённом состоянии наличную при трёхосном напряжённом состоянии с главными напряжениями $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ ($\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$) алгебраически наибольшую нормальную деформацию по второй теории прочности. Здесь $\mu_{ep}$ есть упругопластический коэффициент поперечной деформации. Если выраженная через главные деформации $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ ($\varepsilon_1 \ge \varepsilon_2 \ge \varepsilon_3$) интенсивность деформаций $\varepsilon_i = (2^{1/2}/3)[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{1/2}$ не превышает наибольшей упругой интенсивности деформаций $\sigma_s/E$, то $\mu_{ep} = \mu_e = \mu$, а если превышает, то в первом приближении $\mu_{ep} = \mu + (1/2 - \mu)(1 - \sigma_s/(E\varepsilon_i))$ со строго монотонным возрастанием функции $\mu_{ep}(\varepsilon_i)$ от значения $\mu$ при $\varepsilon_i = \sigma_s/E$ до предельного значения 1/2 при неограниченном возрастании интенсивности деформаций $\varepsilon_i$ с учётом двойного неравенства $0 \le \mu \le 1/2$ для всех исследованных материалов.

Именно и только при необходимом и достаточном условии положительности максимума $\sigma$ равносильное (эквивалентное) напряжение по общему критерию предельных состояний $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_t$, в частности по третьей теории прочности (критерию наибольших сдвиговых напряжений) или по четвёртой теории прочности (критерию удельной энергии формоизменения), заменяется взвешенным средним с этим максимумом $\sigma$ с указанными степенными функциями доли пластичности $\chi$ материала как весами соответственно:

$$\sigma_e = [(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0} + \chi^\gamma{}_{\sigma>0}F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_t,\ \sigma_e = [(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0} + \chi^\gamma{}_{\sigma>0}(\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_t,\ \gamma > 0,\ \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3,$$

$$\sigma_e = [(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0} + 2^{-1/2}\chi^\gamma{}_{\sigma>0}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} = \sigma_t,\ \sigma = \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\}.$$

Здесь вводится обозначение обусловленности наличия предмета приведением условия его наличия, например указателем (индексом) либо в скобках за предметом, который при этом становится функцией этого условия. При нарушении условия наличия предмет заменяется пустым (нейтральным, сохраняющим итог без него) элементом соответствующего действия над предметом, в частности нулём при сложении, единицей при умножении, пустым множеством при теоретико-множественном объединении, пустым элементом # при объединении элементов в множество (пустое множество Ø, если вообще не содержит непустых элементов), универсальным (всеобъемлющим) множеством при теоретико-множественном пересечении, не имеющим места утверждением при дизъюнкции, имеющим место утверждением при конъюнкции. Если непосредственно вслед за предметом условие наличия предмета содержит целиком составляющий левую часть условия сам предмет только раз, то в условии предмет можно опустить при исключении возможности заблуждений, что и сделано выше для первого слагаемого $[(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0}$ с его укороченным спереди условием $[(1 - \chi^\gamma)\sigma] > 0$. При обусловливании второго сомножителя $\sigma$ первого слагаемого $[(1 - \chi^\gamma)\sigma]$ равносильным предыдущему условием $\sigma > 0$ в виде $(1 - \chi^\gamma)\sigma_{>0}$ опускался бы только второй сомножитель $\sigma$, заменяясь единицей и заменяя произведение первым сомножителем, а не нулём, как это требуется и что даётся обусловливанием $[(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0}$ произведения $[(1 - \chi^\gamma)\sigma]$. Если обусловлено опускание итога действия над предметом, то этот итог берётся в скобки и условие указывается применительно к этому итогу. То есть в данном случае соответственно

$$\sigma_e = (1 - \chi^\gamma)\max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} + \chi^\gamma F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} > 0,$$

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} \le 0;$$

$$\sigma_e = (1 - \chi^\gamma)\max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} + \chi^\gamma(\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} > 0,$$

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} \le 0; \sigma_e = (1 - \chi^\gamma)\max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} + 2^{-1/2}\chi^\gamma[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} > 0, \sigma_e = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} \le 0.$$

В частных случаях возможны также частные способы аналитического объединения раздвоенных формул, например здесь взамен обусловливания $[(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0}$ использование равносильного дополнительного умножения могущего быть опущенным слагаемого на полусумму единицы и функции знака этого слагаемого: $(1 - \chi^\gamma)\sigma\{1 + \mathrm{sign}[(1 - \chi^\gamma)\sigma]\}/2$.

Каждый из этих критериев предельных состояний достаточен для объяснения продольного раскалывания одноосно сжимаемых образцов из хрупких материалов без растягивающих главных напряжений. При одноосном сжатии главные напряжения суть $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$. Каждый из этих критериев предельных состояний даёт $\sigma_e = (1 - \chi^\gamma)(- \mu\sigma_3) + \chi^\gamma(- \sigma_3)$ с обоими положительными слагаемыми, отрывное первое из которых дано второй теорией прочности благодаря наибольшей нормальной деформации и соответствует разрушению отрывом, здесь продольным раскалыванием одноосно сжимаемых образцов из хрупких материалов без растягивающих главных напряжений, а сдвиговое второе из этих положительных слагаемых дано общим критерием предельных состояний $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_t$, в частности третьей теорией прочности (критерием наибольших сдвиговых напряжений) или четвёртой теорией прочности (критерием удельной энергии формоизменения), и соответствует разрушению сдвигом благодаря наибольшему или октаэдрическому сдвиговому напряжению.

Отрывное первое слагаемое больше сдвигового второго из этих положительных слагаемых, если доля пластичности $\chi$ материала в степени $\gamma$ удовлетворяет неравенству $\chi^\gamma < \mu/(1 + \mu)$.

Отношение $\chi^\gamma(- \sigma_3)/[(1 - \chi^\gamma)(- \mu\sigma_3)] = \chi^\gamma/[(1 - \chi^\gamma)\mu]$ сдвигового второго к отрывному первому из этих положительных слагаемых есть тангенс угла наклона луча напряжённого состояния на определяющей характер разрушения отрывом или сдвигом диаграмме механического состояния материала при различных способах нагружения с наличными и предельными отрывными и сдвиговыми напряжениями в единой теории прочности Я. Б. Фридмана.

Если это отношение больше отношения предельных сдвигового и отрывного напряжений материала, то предположительно разрушение сдвигом (срезом), а если меньше, то отрывом.

Вторая теория прочности проще объясняет продольное раскалывание одноосно сжимаемых образцов из хрупких материалов без растягивающих главных напряжений, но куда менее убедительно, поскольку вопреки многим опытам явно ошибочно ограничивает прочность изотропного материала при трёхосном равном сжатии и вообще имеет крайне ограниченную область приемлемости, как раз верно используемую созданным общим методом правильного учёта непременно положительных алгебраически наибольших главных напряжения и деформации и предложенными синергичными критериями предельных состояний.

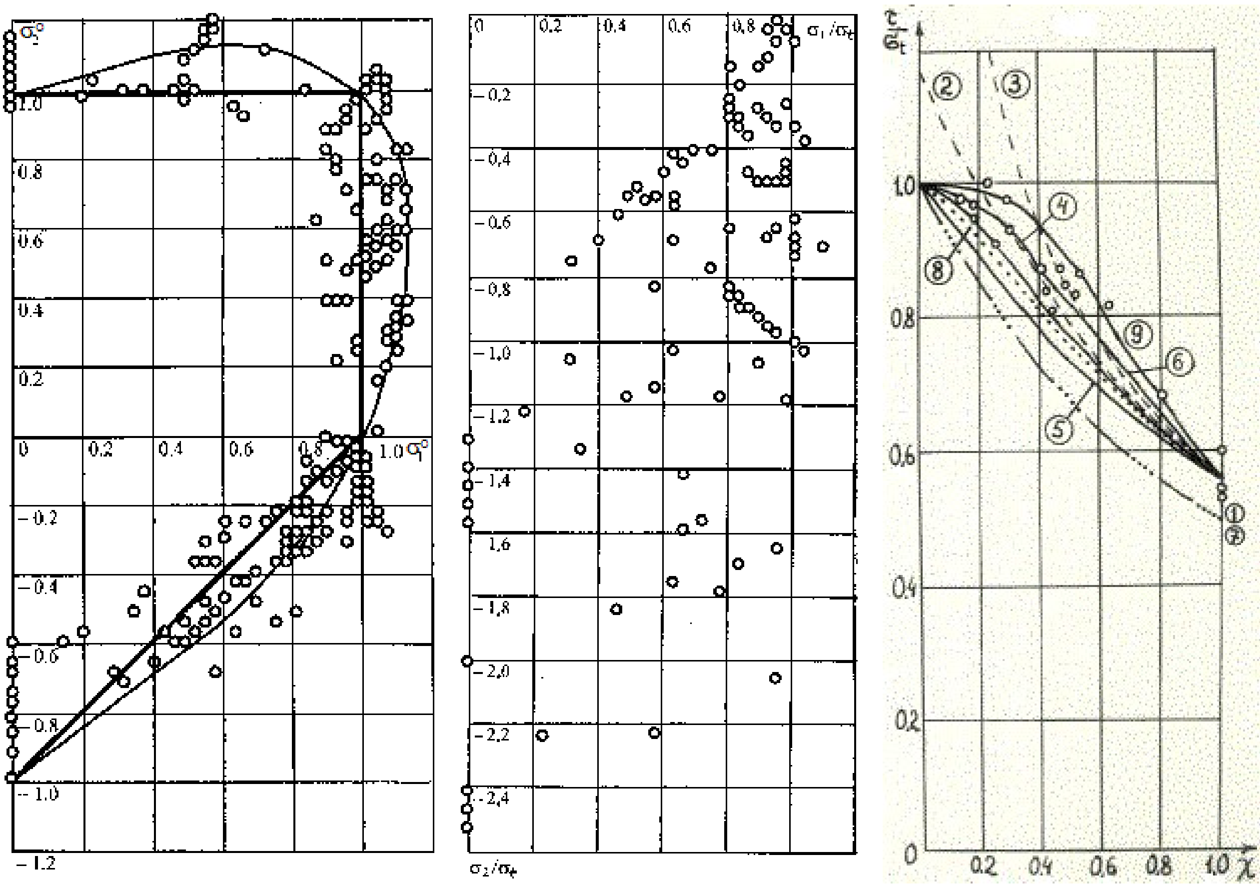
При переменном (не обязательно регулярном, периодическом, циклическом) нагружении за время $t(0) = t_0 \le t \le t_1 = t(1)$ каждая переменная программа синхронно приведённого главного напряжения $\sigma_{ju}°(t)$ при постоянной нумерации без упорядоченности алгебраических величин главных напряжений заменяется равноопасным циклически изменяющимся одноосным напряжённым состоянием со средним напряжением цикла, равным среднему напряжению программы или минимально изменённым (если иначе равноопасность недостижима), величиной $\sigma_{mju}°$ и искомым равноопасным амплитудным напряжением цикла $\sigma_{aju}°$.

Переменной программе синхронно приведённого главного напряжения $\sigma_{ju}^\circ(t)$ соответствует постоянное векторное приведённое напряжение $\bar{\sigma}_{ju}^\circ = (\sigma_{mju}^\circ, \sigma_{aju}^\circ)$, действия согласно функции F выполняются по правилам векторной алгебры и результат берётся по модулю.

Необходимость обобщить проверку как статической, так и усталостной прочности при циклически изменяющемся одноосном напряжённом состоянии приводит к структуре приведённого критерия предельных состояний анизотропного материала при переменном нагружении (с выбором в каждом случае своей наиболее опасной зависящей или не зависящей от времени t перестановки индексов ju(t) или ju соответственно из чисел 1, 2, 3):

$$\sigma_e^\circ = \max\{\sup_{t\in[t(0),t(1)]}\max_{ju(t)}F[\sigma_{1u}^\circ(t), \sigma_{2u}^\circ(t), \sigma_{3u}^\circ(t)];\ \max_{ju}|F(\bar{\sigma}_{1u}^\circ, \bar{\sigma}_{2u}^\circ, \bar{\sigma}_{3u}^\circ)|\} = 1.$$

Деление главного напряжения $\sigma_j$ на $\sigma_t$ даёт в научной монографии Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева первый квадрант рис. 5, а и весь рис. 5, б для двухосных предельных состояний разнообразных изотропных пластичных, квазихрупких и хрупких материалов. Деление $\sigma_j$ на $\sigma_t$ при $\sigma_j \geq 0$ и на $\sigma_c$ при $\sigma_j \leq 0$ даёт весь рис. 5, а с примерно таким же разбросом именно тех же данных в четвёртом квадранте, как и в первом, с приближениями данных (кружочки) приведёнными третьей (ломаная) и четвёртой (кривая) теориями прочности.




а) б) в)

Рисунок 5. Экспериментальная оценка достоверности приведённых критериев прочности.

Приведённые критерии предельных состояний дают согласующиеся с известными результаты для отношения $\tau_L/\sigma_t$ предельных напряжений при кручении и одноосном растяжении в зависимости от $\chi = \sigma_t/\sigma_c$ для изотропных различно сопротивляющихся растяжению и сжатию материалов (рис. 5, в) согласно критериям Кулона–Мора (кривая 1), Боткина–Миролюбова (кривая 2), Баландина (кривая 3), критериям Писаренко–Лебедева как выражениям их теории (кривые 4–6), а также и по приведённым третьей (кривая 7) и четвёртой (кривая 8) теориям прочности и критерию Писаренко–Лебедева (кривая 9).

Нечувствительность известных критериев предельных состояний изотропных одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию материалов к влиянию промежуточного главного напряжения $\sigma_2$ и трёхосного равного сжатия устранима линейным исправлением $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + x\sigma_2 = \sigma_L$, $\sigma_e{}^\circ = \max_{ju}F(\sigma_1{}^\circ, \sigma_2{}^\circ, \sigma_3{}^\circ) + x\sigma_2{}^\circ = 1$, где x – дополнительная безразмерная постоянная материала, определяемая по третьему опыту с $\sigma_2 \neq 0$ (кручение не подходит).

В частности, линейное исправление обоих критериев предельных состояний с синергией первой, второй и или третьей, или четвёртой теорий прочности даёт

$$\sigma_e = (1 - \chi^\gamma)\max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} + \chi^\gamma(\sigma_1 - \sigma_3) + x\sigma_2 = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} > 0,$$
$$\sigma_e = \sigma_1 + x\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} \le 0; \sigma_e = (1 - \chi^\gamma)\max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} + 2^{-1/2}$$
$$\chi^\gamma[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} + x\sigma_2 = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} > 0,$$
$$\sigma_e = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} + x\sigma_2 = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} \le 0;$$
$$\sigma_e = [(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0} + \chi^\gamma{}_{\sigma>0}(\sigma_1 - \sigma_3) + x\sigma_2 = \sigma_t, \sigma_e = [(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0} + 2^{-1/2}\chi^\gamma{}_{\sigma>0}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 -$$
$$\sigma_3)^2]^{1/2} + x\sigma_2 = \sigma_t \ (\gamma > 0, \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3, \sigma = \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\}).$$

Полная диаграмма и кривая усталости Вёлера избавляется от долей циклов заменой числа циклов $N_{old}$ его потолком $N = ]N_{old}[$. Для любой положительной доли цикла строго N = 1. Нет отрицательных логарифмов N и необходимости положительных добавок к N. Ввиду разбросов опытных данных не обязателен учёт возможности положительности предела выносливости $\sigma_{(\infty)} > 0$. Его можно оценить по совокупности всех данных, в т. ч. формулой $\sigma_{(\infty)} \approx \sigma_{(9)} \approx 2\sigma_{(7)} - \sigma_{(5)} \approx 2\sigma_{(7)} - \sigma_{(lgNcr)} = 2\sigma_{(7)} - \sigma_{cr}$. Единое степенное аналитическое приближение полной кривой усталости Вёлера монотонно убывает с одной сменой выпуклости вверх на выпуклость вниз в точке перегиба при переходе от малоцикловой усталости к многоцикловой усталости, в общем виде с постоянными a > 0, b > 1: $\sigma_{(lgN)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(1 + a\lg^bN)$.

Упрощение введением новых переменных x = lgN, $y = f(x) = (\sigma_{(lgN)} - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})$ приводит к равносильной функции $y = f(x) = 1/(1 + ax^b)$ с аннулирующейся только при x = 0 и всюду отрицательной при x > 0 первой производной $dy/dx = df/dx = - abx^{b-1}/(1 + ax^b)^2$ и с меняющей знак с минуса на плюс второй производной $d^2y/dx^2 = d^2f/dx^2 = abx^{b-2}[a(b + 1)x^b - (b - 1)]/(1 + ax^b)^3$ с обращением в нуль в точке перегиба $x = \{(b - 1)/[a(b + 1)]\}^{1/b}$ как соответствующей критическому числу циклов $N_{cr}$ и критическому наибольшему модулю $\sigma_{cr} = \sigma_{(lgNcr)} = |\sigma|_{maxcr}$ напряжений цикла точке перехода от малоцикловой усталости к многоцикловой усталости.

В этой точке $a = (b - 1)/[(b + 1)x^b] = (b - 1)/[(b + 1)\lg^bN_{cr}]$. Единое степенное аналитическое приближение $\sigma_{(lgN)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/\{1 + (b - 1)\lg^bN/[(b + 1)\lg^bN_{cr}]\}$ при $N = N_{cr}$ даёт $\sigma_{(lgN)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/\{1 + [(\sigma_u - \sigma_{cr})/(\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)})]\lg^bN/\lg^bN_{cr}\}$. Полезно считать предел прочности $\sigma_u$ заранее определённым и исходить из $\sigma_{(lgN)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(1 + a\lg^bN)$, $y = f(x) = 1/(1 + ax^b)$ с выбором положительных a и b не по одной критической точке, а по наименьшему отклонению от всей совокупности n пар данных о циклических предельных напряжениях и числах выдержанных циклов. Имеют место $ax^b = 1/y - 1$, $\lg a + b\lg x = \lg(1/y - 1)$. Вводится c = lga. Тогда $c + b\lg x = \lg(1/y - 1)$, $c + (\lg\lg N)b = \lg[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(lgN)} - \sigma_{(\infty)}) - 1]$. n пар опытных данных $[\lg N_i, \sigma_{(lgN(i))}]$ (i = 1, 2, 3, 4, 5, ... , n) дают переопределённую систему n линейных уравнений с двумя неизвестными c и b: $c + (\lg\lg N_i)b = \lg[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(lgN(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1]$ (i = 1, 2, 3, 4, 5, ... , n).

Метод наименьших квадратов минимизирует сумму квадратов отклонений по всем n этим уравнениям аннулированием частных производных этой суммы по c и b с решением системы

$$nc + \Sigma_{i=1}{}^n\lg\lg N_i\, b = \Sigma_{i=1}{}^n\lg[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(lgN(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1],$$
$$\Sigma_{i=1}{}^n\lg\lg N_i\, c + \Sigma_{i=1}{}^n\lg^2\lg N_i\, b = \Sigma_{i=1}{}^n\lg\lg N_i\, \lg[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(lgN(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1]:$$
$$c = \{\Sigma_{i=1}{}^n\lg[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(lgN(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1]\, \Sigma_{i=1}{}^n\lg^2\lg N_i - \Sigma_{i=1}{}^n\lg\lg N_i\, \lg[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(lgN(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1]$$
$$\Sigma_{i=1}{}^n\lg\lg N_i\}/[n\Sigma_{i=1}{}^n\lg^2\lg N_i - (\Sigma_{i=1}{}^n\lg\lg N_i)^2],\ b = \{n\Sigma_{i=1}{}^n\lg\lg N_i\, \lg[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(lgN(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1] -$$
$$\Sigma_{i=1}{}^n\lg\lg N_i\, \Sigma_{i=1}{}^n\lg[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(lgN(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1]\}/[n\Sigma_{i=1}{}^n\lg^2\lg N_i - (\Sigma_{i=1}{}^n\lg\lg N_i)^2].$$

Тогда $a = 10^c$ и $\sigma_{(lgN)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(1 + a\lg^bN)$. Полезно графическое представление n уравнений $c + (\lg\lg N_i)b = \lg[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(lgN(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1]$ (i = 1, 2, 3, 4, 5, ... , n) с неизвестными c и b и n пар опытных данных $[\lg N_i, \sigma_{(lgN(i))}]$ (i = 1, 2, 3, 4, 5, ... , n) в линеаризующей системе координат lglgN, $\lg[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(lgN(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1]$ и <u>единое показательно-степенное аналитическое приближение полной кривой усталости Вёлера</u>, строго монотонно убывающее с единственной сменой выпуклости вверх на выпуклость вниз в точке перегиба при переходе от малоцикловой усталости к многоцикловой усталости, в общем виде с числовыми постоянными a > 0, b > 1: $\sigma_{(lgN)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)})\exp(-a\lg^bN)$.

Переменные $x = \lg N$, $y = f(x) = (\sigma_{(\lg N)} - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})$ приводят к $y = f(x) = \exp(-ax^b)$ с нулевой при $x = 0$ и отрицательной при $x > 0$ первой производной $dy/dx = df/dx = - abx^{b-1}\exp(-ax^b)$ и с меняющей знак с минуса на плюс второй производной $d^2y/dx^2 = d^2f/dx^2 = abx^{b-2}\exp(-ax^b)[abx^b - (b - 1)]$ с обращением в нуль в точке перегиба $x = [(b - 1)/(ab)]^{1/b}$, критическими числом циклов $N_{cr}$, наибольшим модулем $\sigma_{cr} = \sigma_{(\lg N_{cr})} = |\sigma|_{maxcr}$ напряжений и $a = (b - 1)/(bx^b) = (b - 1)/(b\lg^b N_{cr})$. Единое степенное аналитическое приближение $\sigma_{(\lg N)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)})\exp[-(b - 1)\lg^b N/(b\lg^b N_{cr})]$ принимает общий вид $\sigma_{(\lg N)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)})\exp\{-\ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)})]\lg^b N/\lg^b N_{cr}\}$.

Полезно считать предел прочности $\sigma_u$ заранее определённым и исходить из $\sigma_{(\lg N)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)})\exp(-a\lg^b N)$, $y = f(x) = \exp(-ax^b)$ с выбором положительных a и b не по одной критической точке, а по наименьшему отклонению от всей совокупности n пар данных о циклических предельных напряжениях и числах выдержанных циклов. Имеют место $\exp(ax^b) = 1/y$, $ax^b = -\ln y$, $\lg a + b\lg x = \lg(-\ln y)$. Вводится $c = \lg a$. Тогда $c + b\lg x = \lg\{\ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(\lg N)} - \sigma_{(\infty)})]\}$. n пар опытных данных $[\lg N_i, \sigma_{(\lg N(i))}]$ (i = 1, 2, 3, 4, 5, ... , n) дают переопределённую систему n линейных уравнений с двумя неизвестными c и b: $c + (\lg\lg N_i)b = \lg\{\ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})]\}$ (i = 1, 2, 3, 4, 5, ... , n). Минимизируется сумма квадратов отклонений по всем n этим уравнениям аннулированием частных производных этой суммы по c и b с решением системы

$$nc + \Sigma_{i=1}^n \lg\lg N_i\, b = \Sigma_{i=1}^n \lg\{\ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})]\},$$

$$\Sigma_{i=1}^n \lg\lg N_i\, c + \Sigma_{i=1}^n \lg^2\lg N_i\, b = \Sigma_{i=1}^n \lg\lg N_i\, \lg\{\ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})]\}:$$

$$c = \{\Sigma_{i=1}^n \lg[\ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})]]\, \Sigma_{i=1}^n \lg^2\lg N_i - \Sigma_{i=1}^n \lg\lg N_i\, \lg[\ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})]]\, \Sigma_{i=1}^n \lg\lg N_i\}/[n\Sigma_{i=1}^n \lg^2\lg N_i - (\Sigma_{i=1}^n \lg\lg N_i)^2],\ b = \{n\Sigma_{i=1}^n \lg\lg N_i\, \lg[\ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})]] - \Sigma_{i=1}^n \lg\lg N_i\, \Sigma_{i=1}^n \lg[\ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})]]\}/[n\Sigma_{i=1}^n \lg^2\lg N_i - (\Sigma_{i=1}^n \lg\lg N_i)^2].$$

Тогда $a = 10^c$ и $\sigma_{(\lg N)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)})\exp(-a\lg^b N)$. Полезно графическое представление n уравнений $c + (\lg\lg N_i)b = \lg\{\ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})]\}$ и n пар опытных данных $[\lg N_i, \sigma_{(\lg N(i))}]$ (i = 1, 2, 3, 4, ... , n) в линеаризующей системе координат $\lg\lg N$, $\lg\{\ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})/(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})]\}$.

Псевдорешение методом наименьших квадратов – начальное приближение итерационного общего метода наименьших нормально взвешенных степеней, в т. ч. квадратов. Его формулы минимизируют суммы положительно взвешенных квадратов разностей частей уравнений. Общий метод наименьших нормально взвешенных степеней предполагает переопределённую систему m линейных уравнений $\Sigma_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ (i = 1, 2, 3, 4, ... , m) с $n < m$ искомыми неизвестными $x_j$ (j = 1, 2, 3, 4, 5, ... , n) с известными $a_{ij}$ и $b_i$ при неизвестных $x_j$ обезразмеренной с действительными (не)известными и с нормированием каждого уравнения делением на квадратный корень из суммы квадратов коэффициентов при всех неизвестных с умножением некоторых уравнений на (-1). Берутся две неотрицательные меры нарушения уравнения псевдорешением $x_j = x_{j(k)}$ (j = 1, 2, 3, 4, 5, ... , n) как предыдущим k-ым приближением к квазирешению (наилучшему псевдорешению). Взвешиваемой мерой берётся модуль разности частей уравнения. Взвешивающей мерой – всеобщая погрешность

$$E_{i(k)} = |\Sigma_{j=1}^n a_{ij}x_{j(k)} - b_i|/|\Sigma_{j=1}^n (|a_{ij}||x_{j(k)}| + |b_i|)\ (i = 1, 2, 3, 4, 5, ... , m;\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...).$$

Совокупность взвешивающих мер $E_{1(k)}$, $E_{2(k)}$, $E_{3(k)}$, ... , $E_{m(k)}$ симметризуется относительно нуля пополнением $[-E_{1(k)}]$, $[-E_{2(k)}]$, $[-E_{3(k)}]$, ... , $[-E_{m(k)}]$. Взвешиваются $|\Sigma_{j=1}^n a_{1j}x_{j(k)} - b_1|^q$, $|\Sigma_{j=1}^n a_{2j}x_{j(k)} - b_2|^q$, $|\Sigma_{j=1}^n a_{3j}x_{j(k)} - b_3|^q$, ... , $|\Sigma_{j=1}^n a_{mj}x_{j(k)} - b_m|^q$ $(q > 0)$ (быть может, другими) одинаковыми степенями $\exp[-pE_{1(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)]$, $\exp[-pE_{2(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)]$, $\exp[-pE_{3(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)]$, ... , $\exp[-pE_{m(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)]$ $(p > 0,\ \sigma_{(k)}^2 = [\Sigma_{i=1}^m (- E_{i(k)})^2 + \Sigma_{i=1}^m E_{i(k)}^2]/(2m) = [\Sigma_{i=1}^m E_{i(k)}^2]/m)$ введённых приведённых (единообразно для всех уравнений умноженных на $(2\pi)^{1/2}\sigma_{(k)}$) плотностей вероятности каждой взвешивающей неотрицательной меры в модельном нормальном распределении с нулевым средним и дисперсией $\sigma_{(k)}^2$. Обычно достаточны p = 1, q = 2. Введение сохраняющего знак основания возведения в степень $a^{''b} = |a|^b\mathrm{sign}(a)$ впервые даёт показательные и степенные функции для отрицательных оснований, начальные, центральные и смещённые моменты любых нецелых порядков. Минимизацией $S_{(k+1)} = \Sigma_{i=1}^m \exp[-pE_{i(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)]|\Sigma_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i|^q$ даётся (k+1)-е приближение к квазирешению. Процесс продолжается до нужной точности почти постоянства последовательных приближений и условий минимизации для определения, обоснования и оценивания этого квазирешения с его всеобщей погрешностью как мерой несовместности переопределённой системы m линейных уравнений с $n < m$ неизвестными.

При циклическом нагружении с известными наименьшим $\sigma_{min}$ и наибольшим $\sigma_{max}$, средним $\sigma_m = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2$ и амплитудным $\sigma_a = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$ напряжениями цикла коэффициент асимметрии цикла $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$ имеет три принципиальных изъяна: при симметричном цикле с нулевыми асимметрией и средним $\sigma_m$ $R = -1$, не определён при $\sigma_{max} = 0$, а при монотонном росте $\sigma_m$ по целой диаграмме предельных напряжений цикла изменяется без единого порядка. Вводится правильно определённая доля асимметрии цикла $P = \sigma_m/\sigma_a = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/(\sigma_{max} - \sigma_{min})$.
И при статике естественно ненулевое начало отсчёта напряжений в направлении j, если разную сопротивляемость материала растяжениям и сжатиям рассматривать как одинаковую с тем же размахом $\sigma_{tj} - (- \sigma_{cj}) = \sigma_{tj} + \sigma_{cj} = 2\sigma_{Lj}$ и начальным (остаточным) напряжением $(-\sigma_{m0j})$ как макрорезультат микронапряжений и субмикронапряжений. Соответствующее приведение $\sigma_j^\circ(t) = [\sigma_j(t) - \sigma_{m0j}(t)]/|\sigma_{Lj}(t) - \sigma_{m0j}(t)|$ аналогично формуле с $\sigma_{m0j}(t) = 0$ и логически обобщает её, а исторически опередило её и заложило основы общих теории и методов обобщения критериев предельных состояний $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$ и прочности $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \le \sigma_L$ линейно-функциональным преобразованием главных напряжений, в частности деформированием и/или движением (смещением и/или вращением) предельной поверхности:

$$\sigma_j = A_{j1}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_1' + A_{j2}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_2' + A_{j3}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_3' + \sigma_{j0}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\ (j = 1, 2, 3),$$

где $A_{j1}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$, $A_{j2}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$, $A_{j3}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$ – безразмерные функции преобразованных главных напряжений $\sigma_1'$, $\sigma_2'$, $\sigma_3'$, в частности постоянные; $\sigma_{j0}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$ – имеющая размерность напряжения функция напряжений $\sigma_1'$, $\sigma_2'$, $\sigma_3'$, в частности постоянная. Получены общие анизотропные критерии предельных состояний и прочности в напряжениях $\sigma_1'$, $\sigma_2'$, $\sigma_3'$:

$$\sigma_e = F(A_{11}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_1' + A_{12}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_2' + A_{13}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_3' + \sigma_{10}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'), A_{21}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_1' + A_{22}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_2' + A_{23}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_3' + \sigma_{20}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'), A_{31}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_1' + A_{32}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_2' + A_{33}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_3' + \sigma_{30}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')) = \sigma_L;$$

$$\sigma_e = F(A_{11}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_1' + A_{12}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_2' + A_{13}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_3' + \sigma_{10}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'), A_{21}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_1' + A_{22}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_2' + A_{23}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_3' + \sigma_{20}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'), A_{31}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_1' + A_{32}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_2' + A_{33}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')\sigma_3' + \sigma_{30}(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')) \le \sigma_L.$$

Цилиндр Мизеса может стать эллиптическим и смещаться, при анизотропии наклоняться. При плоском напряжённом состоянии и изотропии материала с разными $\sigma_t$ и $\sigma_c$ достаточно смещение предельной кривой изотропного материала с $\sigma_t = \sigma_c$ вдоль главной диагонали.
Общий метод геометрического (кинематического) обобщения критериев предельных состояний смещением начала отсчёта и общий метод обобщения критериев предельных состояний и прочности добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции дают обобщение четвёртой теории прочности

$$\sigma_e = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c\sigma_t)^{1/2},\ \sigma_j^\circ = \sigma_j/(\sigma_c\sigma_t)^{1/2},$$

при $\sigma_3 = 0$ предельные равные двухосные растяжение $\sigma_{tt}$ и сжатие $(-\sigma_{cc})$ на главной диагонали

$$\sigma_{tt} = (\sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2)^{1/2} - (\sigma_c - \sigma_t) < \sigma_t \text{ при } \sigma_t < \sigma_c,\ \sigma_{cc} = \sigma_c - \sigma_t + [(\sigma_c - \sigma_t)^2 + \sigma_c\sigma_t]^{1/2} > \sigma_c \text{ при } \sigma_t < \sigma_c,$$

$$\sigma_e^\circ = [\sigma_1^{\circ 2} + \sigma_2^{\circ 2} + \sigma_3^{\circ 2} - \sigma_1^\circ\sigma_2^\circ - \sigma_1^\circ\sigma_3^\circ - \sigma_2^\circ\sigma_3^\circ + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1^\circ + \sigma_2^\circ + \sigma_3^\circ)/(\sigma_c\sigma_t)^{1/2}]^{1/2} = 1;$$

обобщение третьей теории прочности в равносильном квадратичном виде $\sigma_e^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = \sigma_L^2$

$$\sigma_e = [(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c\sigma_t)^{1/2},\ \sigma_j^\circ = \sigma_j/(\sigma_c\sigma_t)^{1/2},$$

$$\sigma_e^\circ = [(\sigma_1^\circ - \sigma_3^\circ)^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1^\circ + \sigma_2^\circ + \sigma_3^\circ)/(\sigma_c\sigma_t)^{1/2}]^{1/2} = 1;$$

обобщение общего квадратичного критерия предельных состояний $\sigma_e^2 = F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L^2$

$$\sigma_e = [F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c\sigma_t)^{1/2},\ \sigma_j^\circ = \sigma_j/(\sigma_c\sigma_t)^{1/2},$$

$$\sigma_e^\circ = [F^2(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ) + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1^\circ + \sigma_2^\circ + \sigma_3^\circ)/(\sigma_c\sigma_t)^{1/2}]^{1/2} = 1.$$

Общий метод аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и минус-степени суммы главных напряжений с произвольными положительными показателями для общего критерия предельных состояний $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$ даёт обобщение

$$\sigma_e = [F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha)/(\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^{"\beta}]^{1/\alpha} = [(\sigma_c^\alpha\sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta\sigma_t^\alpha)/(\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)]^{1/\alpha},$$

$$\sigma_j^\circ = \sigma_j(\sigma_{cj}^\beta + \sigma_{tj}^\beta)^{1/\alpha}/(\sigma_{cj}^\alpha\sigma_{tj}^\beta + \sigma_{cj}^\beta\sigma_{tj}^\alpha)^{1/\alpha},$$

$$\sigma_e^\circ = [F^\alpha(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ) + (\sigma_{cj}^\alpha - \sigma_{tj}^\alpha)/(\sigma_{cj}^\beta + \sigma_{tj}^\beta)^{\beta/\alpha}(\sigma_{cj}^\alpha\sigma_{tj}^\beta + \sigma_{cj}^\beta\sigma_{tj}^\alpha)^{\beta/\alpha-1}(\sigma_1^\circ + \sigma_2^\circ + \sigma_3^\circ)^{"\beta}]^{1/\alpha} = 1.$$

Общий метод аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и суммы одинаковых минус-степеней главных напряжений с произвольными положительными показателями для общего критерия предельных состояний $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$ даёт обобщение ($\sigma_j{}^\circ = \sigma_j(\sigma_c{}^\beta + \sigma_t{}^\beta)^{1/\alpha}/(\sigma_c{}^\alpha\sigma_t{}^\beta + \sigma_c{}^\beta\sigma_t{}^\alpha)^{1/\alpha}$) $\sigma_e = [F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c{}^\alpha - \sigma_t{}^\alpha)/(\sigma_c{}^\beta + \sigma_t{}^\beta)(\sigma_1{}^{''\beta} + \sigma_2{}^{''\beta} + \sigma_3{}^{''\beta})]^{1/\alpha} = [(\sigma_c{}^\alpha\sigma_t{}^\beta + \sigma_c{}^\beta\sigma_t{}^\alpha)/(\sigma_c{}^\beta + \sigma_t{}^\beta)]^{1/\alpha}$, $\sigma_j{}^\circ = \sigma_j(\sigma_c{}^\beta + \sigma_t{}^\beta)^{1/\alpha}/(\sigma_c{}^\alpha\sigma_t{}^\beta + \sigma_c{}^\beta\sigma_t{}^\alpha)^{1/\alpha}$,

$$\sigma_e{}^\circ = [F^\alpha(\sigma_1{}^\circ, \sigma_2{}^\circ, \sigma_3{}^\circ) + (\sigma_c{}^\alpha - \sigma_t{}^\alpha)/(\sigma_c{}^\beta + \sigma_t{}^\beta)^{\beta/\alpha} (\sigma_c{}^\alpha\sigma_t{}^\beta + \sigma_c{}^\beta\sigma_t{}^\alpha)^{\beta/\alpha-1}(\sigma_1{}^{\circ''\beta} + \sigma_2{}^{\circ''\beta} + \sigma_3{}^{\circ''\beta})]^{1/\alpha} = 1.$$

Ещё более общий метод аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и одинаковых минус-степеней главных напряжений с произвольными положительными показателями для общего критерия предельных состояний $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$ даёт обобщение ($\sigma_j{}^\circ = \sigma_j/[\Sigma_{j=1}{}^3|\mathrm{sign}(\sigma_j)|(\sigma_{cj}{}^\alpha\sigma_{tj}{}^\beta + \sigma_{cj}{}^\beta\sigma_{tj}{}^\alpha)/(\sigma_{cj}{}^\beta + \sigma_{tj}{}^\beta)]^{1/\alpha}$)

$$\sigma_e = [F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \Sigma_{j=1}{}^3(\sigma_{cj}{}^\alpha - \sigma_{tj}{}^\alpha)/(\sigma_{cj}{}^\beta + \sigma_{tj}{}^\beta)\ \sigma_j{}^{''\beta}]^{1/\alpha} = [\Sigma_{j=1}{}^3|\mathrm{sign}(\sigma_j)|(\sigma_{cj}{}^\alpha\sigma_{tj}{}^\beta + \sigma_{cj}{}^\beta\sigma_{tj}{}^\alpha)/(\sigma_{cj}{}^\beta + \sigma_{tj}{}^\beta)]^{1/\alpha},$$

$$\sigma_e{}^\circ = [F^\alpha(\sigma_1{}^\circ, \sigma_2{}^\circ, \sigma_3{}^\circ) + \Sigma_{j=1}{}^3(\sigma_{cj}{}^\alpha - \sigma_{tj}{}^\alpha)/(\sigma_{cj}{}^\beta + \sigma_{tj}{}^\beta)/[\Sigma_{j=1}{}^3|\mathrm{sign}(\sigma_j)|(\sigma_{cj}{}^\alpha\sigma_{tj}{}^\beta + \sigma_{cj}{}^\beta\sigma_{tj}{}^\alpha)/(\sigma_{cj}{}^\beta + \sigma_{tj}{}^\beta)]$$
$$\sigma_j{}^{\circ''\beta}[\Sigma_{j=1}{}^3|\mathrm{sign}(\sigma_j)|(\sigma_{cj}{}^\alpha\sigma_{tj}{}^\beta + \sigma_{cj}{}^\beta\sigma_{tj}{}^\alpha)/(\sigma_{cj}{}^\beta + \sigma_{tj}{}^\beta)]^{''\beta/\alpha}]^{1/\alpha} = 1.$$

Ещё более общий метод аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и минус-степеней главных напряжений с произвольными положительными показателями для анизотропных материалов и общего критерия предельных состояний $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$ даёт обобщение ($\sigma_j{}^\circ = \sigma_j/[\Sigma_{j=1}{}^3|\mathrm{sign}(\sigma_j)|(\sigma_{cj}{}^\alpha\sigma_{tj}{}^{a(j)} + \sigma_{cj}{}^{a(j)}\sigma_{tj}{}^\alpha)/(\sigma_{cj}{}^{a(j)} + \sigma_{tj}{}^{a(j)})]^{1/\alpha}$)

$$\sigma_e = [F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \Sigma_{j=1}{}^3(\sigma_{cj}{}^\alpha - \sigma_{tj}{}^\alpha)/(\sigma_{cj}{}^{a(j)} + \sigma_{tj}{}^{a(j)})\ \sigma_j{}^{''a(j)}]^{1/\alpha} = [\Sigma_{j=1}{}^3|\mathrm{sign}(\sigma_j)|(\sigma_{cj}{}^\alpha\sigma_{tj}{}^{a(j)} + \sigma_{cj}{}^{a(j)}\sigma_{tj}{}^\alpha)/(\sigma_{cj}{}^{a(j)} + \sigma_{tj}{}^{a(j)})]^{1/\alpha},\ \sigma_e{}^\circ = [F^\alpha(\sigma_1{}^\circ, \sigma_2{}^\circ, \sigma_3{}^\circ) + \Sigma_{j=1}{}^3(\sigma_{cj}{}^\alpha - \sigma_{tj}{}^\alpha)/(\sigma_{cj}{}^{a(j)} + \sigma_{tj}{}^{a(j)})/[\Sigma_{j=1}{}^3|\mathrm{sign}(\sigma_j)|(\sigma_{cj}{}^\alpha\sigma_{tj}{}^{a(j)} + \sigma_{cj}{}^{a(j)}\sigma_{tj}{}^\alpha)/(\sigma_{cj}{}^{a(j)} + \sigma_{tj}{}^{a(j)})]\ \sigma_j{}^{\circ''a(j)}[\Sigma_{j=1}{}^3|\mathrm{sign}(\sigma_j)|(\sigma_{cj}{}^\alpha\sigma_{tj}{}^{a(j)} + \sigma_{cj}{}^{a(j)}\sigma_{tj}{}^\alpha)/(\sigma_{cj}{}^{a(j)} + \sigma_{tj}{}^{a(j)})]^{''a(j)/\alpha}]^{1/\alpha} = 1.$$

Общая методология иерархии обобщения общих методов аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний для анизотропных материалов и критерия Ху–Марина $\sigma_1{}^2/\sigma_{L1}{}^2 + \sigma_2{}^2/\sigma_{L2}{}^2 + \sigma_3{}^2/\sigma_{L3}{}^2 - \sigma_1\sigma_2/(\sigma_{L1}\sigma_{L2}) - \sigma_1\sigma_3/(\sigma_{L1}\sigma_{L3}) - \sigma_2\sigma_3/(\sigma_{L2}\sigma_{L3}) = 1$ даёт обобщение $\sigma_1{}^2/(\sigma_{c1}\sigma_{t1}) + \sigma_2{}^2/(\sigma_{c2}\sigma_{t2}) + \sigma_3{}^2/(\sigma_{c3}\sigma_{t3}) + A_{12}\sigma_1\sigma_2 + A_{13}\sigma_1\sigma_3 + A_{23}\sigma_2\sigma_3 + (1/\sigma_{t1} - 1/\sigma_{c1})\sigma_1 + (1/\sigma_{t2} - 1/\sigma_{c2})\sigma_2 + (1/\sigma_{t3} - 1/\sigma_{c3})\sigma_3 = 1$ (при любых $A_{12}$, $A_{13}$, $A_{23}$), в частности

$$A_{12} = -1/(\sigma_{c1}\sigma_{t1}\sigma_{c2}\sigma_{t2})^{1/2};\ A_{13} = -1/(\sigma_{c1}\sigma_{t1}\sigma_{c3}\sigma_{t3})^{1/2};\ A_{23} = -1/(\sigma_{c2}\sigma_{t2}\sigma_{c3}\sigma_{t3})^{1/2};$$

$$\sigma_1{}^2/(\sigma_{c1}\sigma_{t1}) + \sigma_2{}^2/(\sigma_{c2}\sigma_{t2}) + \sigma_3{}^2/(\sigma_{c3}\sigma_{t3}) - \sigma_1/(\sigma_{c1}\sigma_{t1})^{1/2}\ \sigma_2/(\sigma_{c2}\sigma_{t2})^{1/2} - \sigma_1/(\sigma_{c1}\sigma_{t1})^{1/2}\ \sigma_3/(\sigma_{c3}\sigma_{t3})^{1/2} - \sigma_2/(\sigma_{c2}\sigma_{t2})^{1/2}\ \sigma_3/(\sigma_{c3}\sigma_{t3})^{1/2} + (1/\sigma_{t1} - 1/\sigma_{c1})\sigma_1 + (1/\sigma_{t2} - 1/\sigma_{c2})\sigma_2 + (1/\sigma_{t3} - 1/\sigma_{c3})\sigma_3 = 1;$$

$$(\sigma_1/(\sigma_{c1}\sigma_{t1})^{1/2})^2 + (\sigma_2/(\sigma_{c2}\sigma_{t2})^{1/2})^2 + (\sigma_3/(\sigma_{c3}\sigma_{t3})^{1/2})^2 - \sigma_1/(\sigma_{c1}\sigma_{t1})^{1/2}\ \sigma_2/(\sigma_{c2}\sigma_{t2})^{1/2} - \sigma_1/(\sigma_{c1}\sigma_{t1})^{1/2}\ \sigma_3/(\sigma_{c3}\sigma_{t3})^{1/2} - \sigma_2/(\sigma_{c2}\sigma_{t2})^{1/2}\ \sigma_3/(\sigma_{c3}\sigma_{t3})^{1/2} + [(\sigma_{c1}/\sigma_{t1})^{1/2} - (\sigma_{t1}/\sigma_{c1})^{1/2}]\sigma_1/(\sigma_{c1}\sigma_{t1})^{1/2} + [(\sigma_{c2}/\sigma_{t2})^{1/2} - (\sigma_{t2}/\sigma_{c2})^{1/2}]\sigma_2/(\sigma_{c2}\sigma_{t2})^{1/2} + [(\sigma_{c3}/\sigma_{t3})^{1/2} - (\sigma_{t3}/\sigma_{c3})^{1/2}]\sigma_3/(\sigma_{c3}\sigma_{t3})^{1/2} = 1,$$

$$\sigma_e{}^\circ = \{\sigma_1{}^{\circ 2} + \sigma_2{}^{\circ 2} + \sigma_3{}^{\circ 2} - \sigma_1{}^\circ\sigma_2{}^\circ - \sigma_1{}^\circ\sigma_3{}^\circ - \sigma_2{}^\circ\sigma_3{}^\circ + [(\sigma_{c1}/\sigma_{t1})^{1/2} - (\sigma_{t1}/\sigma_{c1})^{1/2}]\sigma_1{}^\circ + [(\sigma_{c2}/\sigma_{t2})^{1/2} - (\sigma_{t2}/\sigma_{c2})^{1/2}]\sigma_2{}^\circ + [(\sigma_{c3}/\sigma_{t3})^{1/2} - (\sigma_{t3}/\sigma_{c3})^{1/2}]\sigma_3{}^\circ\}^{1/2} = 1,\ \sigma_j{}^\circ = \sigma_j/(\sigma_{cj}\sigma_{tj})^{1/2}\ (j = 1, 2, 3).$$

Обобщение произвольного критерия предельных состояний $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$ даёт

$$\sigma_e{}^\circ = \{F^2(\sigma_1{}^\circ, \sigma_2{}^\circ, \sigma_3{}^\circ) + [(\sigma_{c1}/\sigma_{t1})^{1/2} - (\sigma_{t1}/\sigma_{c1})^{1/2}]\sigma_1{}^\circ + [(\sigma_{c2}/\sigma_{t2})^{1/2} - (\sigma_{t2}/\sigma_{c2})^{1/2}]\sigma_2{}^\circ + [(\sigma_{c3}/\sigma_{t3})^{1/2} - (\sigma_{t3}/\sigma_{c3})^{1/2}]\sigma_3{}^\circ\}^{1/2} = 1;\ \sigma_j{}^\circ = \sigma_j/(\sigma_{cj}\sigma_{tj})^{1/2}\ (j = 1, 2, 3),$$

$$\sigma_e{}^\circ = \{F^2(\sigma_1/(\sigma_{c1}\sigma_{t1})^{1/2}, \sigma_2/(\sigma_{c2}\sigma_{t2})^{1/2}, \sigma_3/(\sigma_{c3}\sigma_{t3})^{1/2}) + [(\sigma_{c1}/\sigma_{t1})^{1/2} - (\sigma_{t1}/\sigma_{c1})^{1/2}]\ \sigma_1/(\sigma_{c1}\sigma_{t1})^{1/2} + [(\sigma_{c2}/\sigma_{t2})^{1/2} - (\sigma_{t2}/\sigma_{c2})^{1/2}]\ \sigma_2/(\sigma_{c2}\sigma_{t2})^{1/2} + [(\sigma_{c3}/\sigma_{t3})^{1/2} - (\sigma_{t3}/\sigma_{c3})^{1/2}]\sigma_3/(\sigma_{c3}\sigma_{t3})^{1/2}\}^{1/2} = 1.$$

Общий метод развития критериев предельных состояний учётом подлинного отношения пределов прочности при одноосном $\sigma_t$ и при равном двухосном $\sigma_{tt}$ растяжениях даёт:

линейный критерий предельных состояний $\sigma_e{}^\circ = \sigma_1/\sigma_t + (1/\sigma_{tt} - 1/\sigma_t)\sigma_2 - \sigma_3/\sigma_c = 1$,

$$\sigma_{et} = \sigma_1 + (\sigma_t/\sigma_{tt} - 1)\sigma_2 - (\sigma_t/\sigma_c)\sigma_3 = \sigma_t,\ \sigma_{ec} = (\sigma_c/\sigma_t)\sigma_1 + (\sigma_c/\sigma_{tt} - \sigma_c/\sigma_t)\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_c;$$

квадратичный критерий предельных состояний $\sigma_e{}^\circ = (\sigma_{1u}{}^2 + \sigma_{2u}{}^2 + \sigma_{3u}{}^2)/(\sigma_c\sigma_t) + (1/\sigma_{tt}{}^2 - 2/(\sigma_c\sigma_t) - 2(1/\sigma_t - 1/\sigma_c)/\sigma_{tt})(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) + (1/\sigma_t - 1/\sigma_c)(\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}) = 1$, $\sigma_{et} = (\sigma_{1u}{}^2 + \sigma_{2u}{}^2 + \sigma_{3u}{}^2)/\sigma_c + (\sigma_t/\sigma_{tt}{}^2 - 2/\sigma_c - 2(1 - \sigma_t/\sigma_c)/\sigma_{tt})(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) + (1 - \sigma_t/\sigma_c)(\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}) = \sigma_t$, $\sigma_e = (\sigma_{1u}{}^2 + \sigma_{2u}{}^2 + \sigma_{3u}{}^2)/\sigma_t + (\sigma_c/\sigma_{tt}{}^2 - 2/\sigma_t - 2(\sigma_c/\sigma_t - 1)/\sigma_{tt})(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) + (\sigma_c/\sigma_t - 1)(\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}) = \sigma_c$;

развитие общего критерия предельных состояний $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 1$ с $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\sigma_e{}^\circ = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))\sigma_2/\sigma_{tt} = 1,\ \sigma_{et} = \sigma_t F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sigma_t(1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))\sigma_2/\sigma_{tt} = \sigma_t,$$
$$\sigma_{ec} = \sigma_c F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sigma_c(1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))\sigma_2/\sigma_{tt} = \sigma_c;$$

развитие общего критерия предельных состояний $F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) = 1$

$$\sigma_e{}^\circ = F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + (1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\sigma_{tt}{}^2 = 1,$$

$$\sigma_{et} = \sigma_t F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + \sigma_t(1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\sigma_{tt}^2 = \sigma_t,$$

$$\sigma_{ec} = \sigma_c F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + \sigma_c(1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\sigma_{tt}^2 = \sigma_c.$$

Общий метод развития критериев предельных состояний учётом подлинного соотношения пределов прочности при одноосных растяжении $\sigma_t$ и сжатии $\sigma_c$ и при чистом сдвиге $\tau_L$ даёт: квазилинейный критерий $\sigma_e^\circ = \sigma_1/\sigma_t - \sigma_3/\sigma_c + (1/(\tau_L\sigma_t) + 1/(\tau_L\sigma_c) - 1/\tau_L^2)\sigma_1\sigma_3 = 1$, $\sigma_{et} = \sigma_1 - \sigma_3\sigma_t/\sigma_c + (1/\tau_L + \sigma_t/(\tau_L\sigma_c) - \sigma_t/\tau_L^2)\sigma_1\sigma_3 = \sigma_t$, $\sigma_{ec} = \sigma_1\sigma_c/\sigma_t - \sigma_3 + (\sigma_c/(\tau_L\sigma_t) + 1/\tau_L - \sigma_c/\tau_L^2)\sigma_1\sigma_3 = \sigma_c$;
квадратичный критерий предельных состояний без упорядоченности $\sigma_{1u}$, $\sigma_{2u}$, $\sigma_{3u}$ $\sigma_e^\circ = (\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2)/(\sigma_c\sigma_t) + (2/(\sigma_c\sigma_t) - 1/\tau_L^2)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) + (1/\sigma_t - 1/\sigma_c)(\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}) = 1$,

$$\sigma_{et} = (\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2)/\sigma_c + (2/\sigma_c - \sigma_t/\tau_L^2)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) + (1 - \sigma_t/\sigma_c)(\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}) = \sigma_t,$$

$$\sigma_{ec} = (\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2)/\sigma_t + (2/\sigma_t - \sigma_c/\tau_L^2)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) + (\sigma_c/\sigma_t - 1)(\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}) = \sigma_c;$$

развитие общего критерия предельных состояний $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 1$ с $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\sigma_e^\circ = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)\sigma_1\sigma_3/\tau_L^2 = 1,\ \sigma_{et} = \sigma_t F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sigma_t(F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)\sigma_1\sigma_3/\tau_L^2 = \sigma_t,\ \sigma_{ec} = \sigma_c F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sigma_c(F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)\sigma_1\sigma_3/\tau_L^2 = \sigma_c;$$

развитие общего критерия предельных состояний $F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) = 1$ без порядка $\sigma_{1u}$, $\sigma_{2u}$, $\sigma_{3u}$

$$\sigma_e^\circ = F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + (F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\tau_L^2 = 1,$$

$$\sigma_{et} = \sigma_t F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + \sigma_t(F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\tau_L^2 = \sigma_t,$$

$$\sigma_{ec} = \sigma_c F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + \sigma_c(F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\tau_L^2 = \sigma_c.$$

Общая теория прочности приводит к иерархии (многоуровневости) законов природы, в т. ч. прочности материалов: 1) универсальные (всеобщие); 2) сверхобщие; 3) общие; 4) подобщие; 5) отдельные; 6) особенные; 7) частные; 8) специальные; 9) конкретные; 10) единичные.

Создана общая теория запаса с общей методологией всеобщего запаса (обобщением всеобщей погрешности измеряющего надёжность точности для суперпсевдорешения задачи), мультипликативной и аддитивной методологиями общего запаса множества как функции индивидуальных запасов независимых переменных в гильбертовых пространствах с открытием явления кратного завышения подлинных запасов прочности по независимым нагрузкам запасом прочности по равносильному (эквивалентному) напряжению при сложном нагружении как обобщение критериев предельных состояний на непредельные состояния.

Если в точке тела вызваны каждое своей независимой нагрузкой все три главных напряжения $\sigma_1 = 250$ МПа, $\sigma_2 = 240$ МПа, $\sigma_3 = 210$ МПа при $\sigma_L = 235$ МПа (пример 1), то по третьей теории прочности запас прочности $n_L = \sigma_L/(\sigma_1 - \sigma_3) = 5.9$ явно неприемлем: при одинаковой кратности погрешностей напряжений $\sigma_1$ и $\sigma_3$ в обе стороны возможны (при независимости нагрузок) сочетания предельных значений $n_L\sigma_1 - \sigma_3/n_L = 1139$ МПа $\gg \sigma_L$ с кратным превышением $\sigma_L$.

Если стержень из материала с $\sigma_t = 100$ МПа и $\sigma_c = 800$ МПа сжат и растянут двумя независимыми парами сил с напряжениями $\sigma = \sigma^- + \sigma^+ = -500$ МПа + 400 МПа = -100 МПа (пример 2), то запас прочности $n_L = \sigma_c/|\sigma| = 8$ явно неприемлем: при допущении одинаковой кратности погрешностей обоих слагаемых в обе стороны возможны (при независимости нагрузок) сочетания предельных значений $n_L\sigma^- + \sigma^+/n_L = -3950$ МПа $\ll -\sigma_c$; $\sigma^-/n_L + n_L\sigma^+ = 3137.5$ МПа $\gg \sigma_t$ с многократным превышением $\sigma_c$ модулем и особенно превышением $\sigma_t$.

Приведённый критерий предельных состояний выражает общий запас равносильного (эквивалентного) напряжения $\sigma_e$ через частные запасы $1/n_j = 1/(\sigma_{Lj}/|\sigma_j|) = |\sigma_j|/\sigma_{Lj} = |\sigma_j^\circ| = ||\overline{\sigma_j}^\circ||$ главных напряжений, выражаемые через индивидуальные запасы исходных параметров при наиболее опасном сочетании их значений и далее через запас, единый для всех этих запасов.

В примере 1 по аддитивной методологии из уравнения $(1 + \delta\mathrm{sign}\sigma_1)\sigma_1 - (1 - \delta\mathrm{sign}\sigma_3)\sigma_3 = \sigma_L$ допускаемая относительная погрешность $\delta = (\sigma_L - \sigma_1 + \sigma_3)/(|\sigma_1| + |\sigma_3|) = 0.423$, коэффициент запаса в сторону уменьшения $n_{a-} = 1/(1 - \delta) = 1/(1 - (\sigma_L - \sigma_1 + \sigma_3)/(|\sigma_1| + |\sigma_3|)) = 1/(1 - 0.423) = 1.733$ и в сторону увеличения $n_{a+} = 1 + \delta = 1 + (\sigma_L - \sigma_1 + \sigma_3)/(|\sigma_1| + |\sigma_3|) = 1.423$, а по мультипликативной методологии из уравнения $n_m^{\mathrm{sign}\sigma(1)}\sigma_1 - \sigma_3/n_m^{\mathrm{sign}\sigma(3)} = \sigma_L$ коэффициент запаса

$$n_m = [2\sigma_L + |\mathrm{sign}\sigma_1 + \mathrm{sign}\sigma_3|(\sigma_L^2 + 4\sigma_1\sigma_3)^{1/2}]/[2(\sigma_1 - \sigma_3) + (\mathrm{sign}\sigma_1 + \mathrm{sign}\sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_3)] = 1.5.$$

В примере 2 по мультипликативной методологии ввиду $-\sigma_c = n_{mc}\sigma^- + \sigma^+/n_{mc} \leq \sigma \leq \sigma^-/n_{mt} + n_{mt}\sigma^+ = \sigma_t$ из уравнений $n_{mc}\sigma^- + \sigma^+/n_{mc} = -\sigma_c$; $\sigma^-/n_{mt} + n_{mt}\sigma^+ = \sigma_t$ коэффициенты запаса по сжатию и растяжению соответственно $n_{mc} = [-\sigma_c - (\sigma_c^2 - 4\sigma^+\sigma^-)^{1/2}]/(2\sigma^-) = 2$; $n_{mt} = [\sigma_t + (\sigma_t^2 - 4\sigma^+\sigma^-)^{1/2}]/(2\sigma^+) = 1.25$ взамен обманчивого избыточного запаса прочности $n_L = \sigma_c/|\sigma| = 8$.

## 3. Применение созданной системы общих теорий, методологий и методов для создания теорий деформирования, жёсткости, оптики, прочности и разрушения сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений

Создана теория прочности сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением. Ввиду $\chi = \sigma_t/\sigma_c < 1$ полезно $p_1$ (рис. 6) и есть наилучшее значение $\Pi_{max}$ отношения $\Pi = p_1/p$, дающее $p_{umax}$. Стеклоэлемент (см. рис. 1, б) нагружен по схеме основного типа в технике высоких давлений (см. рис. 1, а).

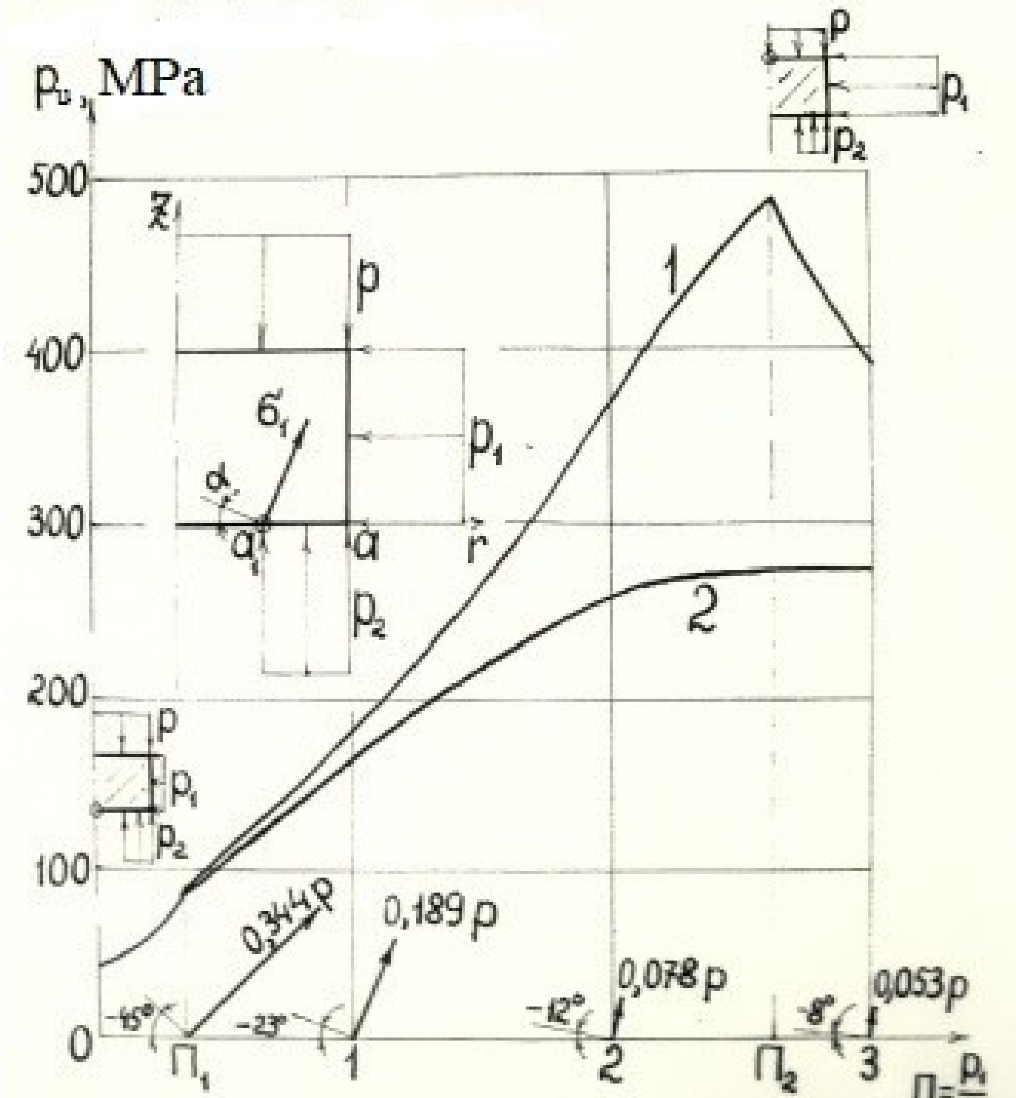



Рисунок 6. Влияние относительной величины $\Pi = p_1/p$ давления $p_1$, приложенного к боковой поверхности нагруженного по схеме основного типа в технике высоких давлений сплошного трёхмерного цилиндрического тела (светопрозрачного элемента) из стекла К8 с $h:a_1:a = 2:1:(11/6)$, на величину и ориентацию разрушающего главного напряжения $\sigma_1$ и вероятный угол $\alpha$ скалывания далее растрескиваемого сегмента у края центральной части частично нагруженного основания, на положение (кружок в центре или на краю центральной части частично нагруженного основания) места наибольшего $\sigma_{emax}$ равносильного (эквивалентного) напряжения $\sigma_e(r, z)$ в теле (светопрозрачном элементе) и на давление его разрушения $p_u$ по первой теории прочности и приведённому критерию Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева (кривая 1), по критериям Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева, Кулона–Мора, приведённой третьей теории прочности и приведённой четвёртой теории прочности (кривая 2).

По критериям Писаренко–Лебедева, Кулона–Мора максимум равносильного напряжения $\sigma_{emax}$ при $0 \le r \le a_1$, $z = 0$. При $p_1 = 0$ $\sigma_{emax} = \sigma_e(0, 0)$ с наибольшими $\sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0) > 0$. Существует

$$\Pi_0 = - 1/2 + (1/2)(1 + m)(1 + \mu) + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2a^2/[h^2(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)$$

с $\sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0) = 0$. При $\Pi = p_1/p \ge \Pi_0$ $\sigma_{emax} = \sigma_e(a_1 - 0, 0)$, тем более что максимум $\tau_{max} = \tau(a_1 - 0, 0)$ сдвигового напряжения $\tau_{rz}(r, z)$. Критическое значение $\Pi_e$ с $\sigma_{emax} = \sigma_e(0, 0) = \sigma_e(a_1 - 0, 0)$

$$\Pi_e = [\sigma_r^2(0, 0) - (1 - \chi)\sigma_r(0, 0)\sigma_r(a_1, 0) - \chi\sigma_r^2(a_1, 0) - (1 + \chi)^2\tau_{max}^2]/\{(1 + \chi)p[\sigma_r(0, 0) - \sigma_r(a_1, 0)]\}|_{\Pi=0}:$$

скачок места $\sigma_{emax}$ из центра на край центральной части частично нагруженного основания; вместо радиального растрескивания тела скалывается/растрескивается сегмент у этой части; первая трещина должна выходить из точки $(a_1 - 0, 0)$ под углом $\alpha = (1/2)\mathrm{arctg}[2\tau_{max}/\sigma_r(a_1, 0)]$ к отрицательному направлению оси r (аргумент и сам арктангенс отрицательны);

при $0 \le \Pi < \Pi_e$ $\sigma_{emax} = \sigma_e(0, 0) > \sigma_e(a_1 - 0, 0)$; при $\Pi > \Pi_e$ $\sigma_{emax} = \sigma_e(a_1 - 0, 0) > \sigma_e(0, 0)$;

$$\Pi_{max} = (3/4)(1 - \chi)\chi^{-1/2}a_1/h - 1/2 + (1/2)(1 + m)(1 + \mu) - (3/4)(1 + \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2a^2/[h^2(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1) - (1/2)m(a^4 - 2a_1^4)/[a^2(a^2 - a_1^2)]$$ даёт минимакс $\sigma_{eminimax} = \sigma_e(a_1 - 0, 0)$.

При $\chi(1/p)\sigma_r(0, 0)|_{\Pi=0} - (1 - \chi)/2\ (1/p)\sigma_r(a_1, 0)|_{\Pi=0} - 1 - \chi\mu/2 \ge 0$ есть и второе критическое значение $\Pi_{e2}$ со скачком места $\sigma_{emax}$ в точку $(0, h)$ с $\sigma_{emax} = \sigma_e(0, h) = \chi\sigma_r(0, 0) - p(1 + \chi\mu/2) + 2\chi p_1$.

Отличия по приведённой третьей и приведённой четвёртой теориям прочности:

$$\Pi_{max} = (3/4)(1 - \chi)\chi^{-1/2}(a_1/h) + p^{-1}\sigma_r(a_1, 0)|_{\Pi=0};\ \text{при}\ [\sigma_r(0, 0) + \sigma_r(a_1, 0)]|_{\Pi=0} \ge (1 + \mu/2)p$$

есть второе критическое значение $\Pi_{e2} = 8\chi^{-1}(1 + \chi)^{-1}p^{-1}\tau_{max}^2/\{[\sigma_r(0, 0) + \sigma_r(a_1, 0)]|_{\Pi=0} - (1 + \mu/2)p\}$.

Отличия по первой теории прочности и приведённому критерию Писаренко–Лебедева:

$$\Pi_e = p^{-1}\{\sigma_r(0, 0)|_{\Pi=0} - \tau_{max}^2/[\sigma_r(0, 0) - \sigma_r(a_1, 0)]\};\ \Pi_{max} = (1/2)(1 + \chi)^{-1}p^{-1}\{\sigma_r(a_1, 0) + (1 + 2\chi)\sigma_r(0, h) + [(\sigma_r(a_1, 0) + (1 + 2\chi)\sigma_r(0, h))^2 + 4(1 + \chi)\chi^{-1}\tau_{max}^2 - \sigma_r(a_1, 0)\sigma_r(0, h) - \chi\sigma_r^2(0, h)]^{1/2}\} \approx (3/4)\chi^{-1/2}a_1/h$$

– второе критическое значение со скачком места $\sigma_{emax}$ в центр $(0, h)$ полностью нагруженного основания без минимакса $\sigma_{eminimax} = \sigma_e(a_1 - 0, 0)$ (несуществен, достигается при $\Pi > \Pi_{max}$).

При $h : a_1 : a = 2 : 1 : (11/6)$ (см. рис. 6) рост $\Pi$ до 1/3 по всем этим критериям предельных состояний удваивает $p_u$; $\Pi = 1$ ещё удваивает $p_u$ с расхождением по разным критериям до 10 %; $\Pi = \Pi_{max} \approx 2.6$ ещё повышает $p_u$ – в 1.6 раза с замедлением по критериям Кулона–Мора, Писаренко–Лебедева, приведённым третьей и четвёртой теориям прочности (обе проверены критерием Кулона–Мора в пределах приемлемости) и почти равномерно в 2.5 раза с резкими максимумом и гиперболическим падением по приведённому критерию Писаренко–Лебедева и первой теории прочности с различиями 1...2 % внутри каждой из обеих групп критериев.

Экспериментальная проверка (рис. 7) показала достоверность созданных общего степенного метода и теорий деформирования, прочности и разрушения сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в т. ч. светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением.

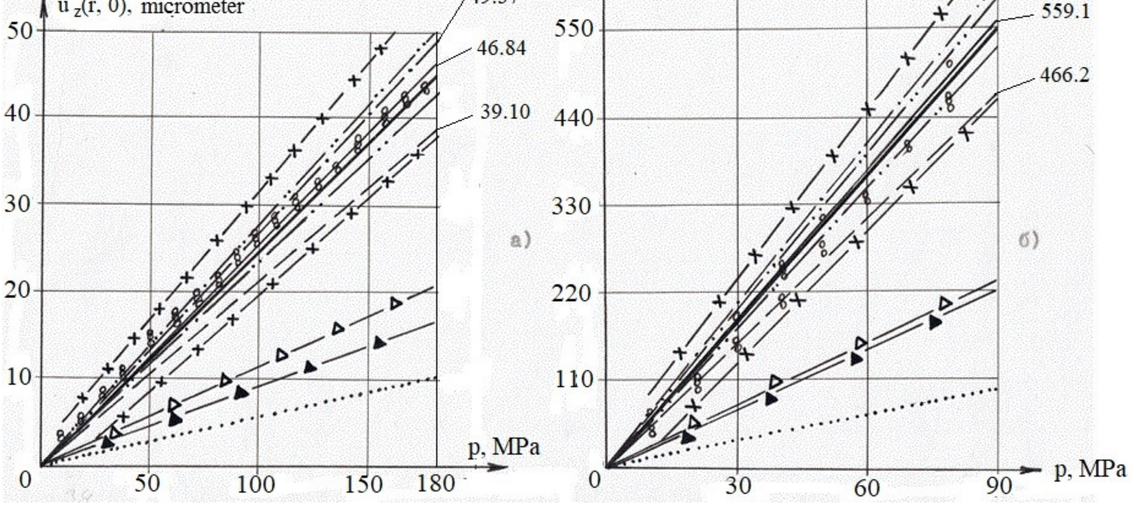


Рисунок 7. Сопоставление экспериментальных (кружочки) и расчётных значений (лучи из начала координат) стрелы прогиба $u = u_z(r, 0)$ от центра до радиуса $r$ на не нагруженной центральной части частично нагруженного основания изгибаемого равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического (а) и органического (б) стекла, по методу конечных элементов (толстый луч), по теории изгибаемой равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания круглой пластины (пунктирный луч), по теории изгибаемой равномерным давлением на одно основание свободно опёртой по краю круглой плиты (штриховой луч с белыми треугольниками), по теории изгибаемой равномерным давлением на одно основание жёстко защемлённой по краю круглой плиты (штриховой луч с зачернёнными треугольниками), по созданному общему (полу)степенному методу (каждый соответствующий луч однозначно определяется показанной ординатой его точки с наибольшей показанной абсциссой 180 МПа для неорганического стекла и 90 МПа для органического стекла) при использовании двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения (сплошной луч) с верхними и нижними границами предельной (штриховые прямые с крестиками) и среднеквадратичной (штриховые прямые с парами точек) погрешностей, по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей (штриховой луч) и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения (штрихпунктирный луч), а также при использовании однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения по методам 1, 2, 3 (в круглых скобках в этом порядке даны ординаты названных точек лучей, тем самым однозначно определённых, но не проведённых ввиду их крайней близости к лучам по методу конечных элементов и по методу 1 при использовании двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения).

Экспериментально подтверждены результатами испытаний давление разрушения, переход от радиального растрескивания к отколу сегмента со свободной центральной частью частично нагруженного основания и углы откола сегмента трёхмерного сплошного цилиндра.

Создана <u>теория влияния на оптические свойства</u> иллюминатора напряжённо-деформированного состояния существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением. Существенно влияние лишь кривизн в центрах оснований на продольную расфокусировку изображения объекта

$$\Delta x_p = p/E\, f_{\text{фw}}'^2/h\, n_a/n_w^2\ \{-(n_g - n_w)[\underline{\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2\, a^2/(a^2 - a_1^2)}\ \underline{- 1/2\,(1 - \mu^2)h^2/a_1^2\, a^2/(a^2 - a_1^2)} + \underline{(1 + m)(1 - \mu^2)} + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2\, a^2/(a^2 - a_1^2)\ln(a/a_1)] + (n_g - n_a)[\underline{\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2\, a^2/(a^2 - a_1^2)}\ \underline{+ (1 + m)(1 - \mu^2)} + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2\, a^2/(a^2 - a_1^2)\ln(a/a_1)]\}$$

при фотограмметрическом фокусном расстоянии гидрообъектива $f_{\text{фw}}' = (n_w/n_a)f_0'$ в воде и $f_0'$ в воздухе и показателях преломления воздуха $n_a$, воды $n_w$ и (не)органического стекла $n_g$ или

$$\Delta x_p = p/E\, f_{\text{фw}}'^2/h\, n_a/n_w^2\ \{-(n_g - n_w)[\underline{- (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)}\ \underline{h^2/a_1^2} + \underline{(1 + m)(1 - \mu^2)} + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2\, a^2/(a^2 - a_1^2)\ln(a/a_1)] + (n_g - n_a)[\underline{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)\,(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)\, h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2)} + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2\, a^2/(a^2 - a_1^2)\ln(a/a_1)]\}$$

по двухпараметрическому ($m$, $\delta$) или однопараметрическому ($m$) методам устранения минимизированной невязки осевого перемещения соответственно.

Открыты и обоснованы дальнейшие <u>явления и законы напряжённо-деформированного состояния трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением</u>:

явление и закон кратного (примерно в три-четыре раза) превышения кривизны в центре полностью нагруженного основания кривизной в центре частично нагруженного основания;

явление и закон необходимости дополнения стрелы прогиба (общей характеристики искривления при изгибе) кривизной (местной характеристикой искривления при изгибе);

явление и закон превышения на порядок модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания положительным вкладом кривизны в центре частично нагруженного основания в продольную расфокусировку изображения подводного объекта;
явление и закон необходимости и существенности выделения и достаточно точного учёта знака и относительно малого модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания в продольную расфокусировку изображения подводного объекта;
явление и закон необходимости и полезности промежуточного выхода (с возвращением) исследования за собственные пределы напряжённо-деформированного состояния;
явление и закон необходимости раздельного исследования влияний следствий напряжённо-деформированного состояния наряду с исследованием его итогового (суммарного) влияния.
Дальнейшими обобщениями открыты и обоснованы такие всеобщие явления и законы:
всеобщие явление и закон целесообразности относительной малости модуля количественного величиной и качественного знаком оценивающего различителя методов моделирования;
всеобщие явление и закон целесообразности промежуточного выхода (с возвращением) исследования за пределы первоначального предмета по закону отрицания отрицания;
всеобщие явление и закон необходимости и полезности раздельного исследования влияний частей и свойств целого на предмет исследования наряду с исследованием влияния целого.
Рабочая расфокусировка $\Delta x_p' = \Delta x_p + \Delta x_0'$ снижается в $2/(1 - p_{min}/p_{max})$ раз предварительной расфокусировкой $\Delta x_0'$, которая противоположна расфокусировке $\Delta x_p$ для $p = (p_{min} + p_{max})/2$.
Созданы теории деформирования, прочности и разрушения, жёсткости и оптики, метод и алгоритм комплексной оптимизации трёхмерного цилиндрического стеклоэлемента.
Предложены и обоснованы конструкции иллюминаторов для высоких давлений, защищённые авторскими свидетельствами на изобретения.

## 4. Приложение созданной системы общих теорий, методологий и методов к выдвижению принципов и созданию методов рационального управления прочностью светопрозрачных и несущих элементов и их соединений средствами уплотнительной техники при высоких давлениях

Наилучшее функционально допустимое и технологически осуществимое изменение ступенчатой нагрузки существенно полезнее простых распространения или ограничения зоны действия высокого давления на поверхность светопрозрачных и несущих элементов.
Метод линеаризации выделил в связанной задаче аэроупругости задачу прочности паяного сотового уплотнения с опытным выявлением разрушения со стороны низкого давления.
Методы иерархизации систем неопределённостей участков сцепления и проскальзывания и критических значений в осесимметричной контактной задаче с трением для упругих уплотнений с заниженными разгрузочными поясками дали блок-схему алгоритма решения. Существуют зависящие от конфигурации стягиваемых деталей, упругих свойств их материалов, а также температурного поля и рабочих (и радиальных контактных при сборке с натягом) давлений два главных критических значения суммарного осевого усилия затяжки Q. Превышение первого из них меняет повсеместное проскальзывание на сочетающееся со сцеплением, а второго – на повсеместное сцепление. В промежутке между главными критическими значениями находятся другие критические значения, превышение каждого из которых приводит к появлению участка сцепления и/или исчезновению участка проскальзывания. В любом случае при одинаковых относительно модуля продольной упругости Юнга E и коэффициента поперечной деформации Пуассона $\mu$ материалах деталей распределение осевых контактных давлений $p_z(r)$ определяется независимо от сдвиговых напряжений при единственном условии статической определимости суммарной осевой силы Q. Это относится, например, к гидрозатяжке $Q = Q_2 - \pi r_i^2 p_i$ усилием $Q_2$, причём Q, $p_i$ и $r_i$ берутся в одном поперечном сечении. При статической неопределимости Q она устанавливается из равенства суммарных осевых перемещений стягиваемых деталей и крепёжных элементов, например шпилек, и распределение контактных давлений может быть

с точностью до постоянной определено независимо от трения. Неопределённая постоянная устанавливается при учёте трения. Если упругие свойства материалов деталей существенно различны, то задача нахождения нормальных и сдвиговых контактных напряжений является связанной и в изложенном алгоритме нормальные контактные напряжения тоже рассматриваются как неопределённые. То же относится к случаю сборки деталей из материалов с подобным различием и к общему случаю их неоднородности с зависимостями упругих характеристик от координат, а также существенно переменной толщины $h(r)$, которые останутся под знаками интегралов. В итоге определяются все компоненты напряжённо-деформированных состояний всех деталей и с использованием приемлемого критерия предельных состояний обычным путём завершается решение задач статической и усталостной прочности, которая здесь оказывается связанной с герметичностью. Для её устойчивости необходимо и достаточно, чтобы контактное давление на внутренний край каждого уплотнительного пояска превышало рабочее давление с запасом герметичности. Экспериментально подтверждена комплексная оптимизация характеристик прочности и герметичности с рациональным выбором занижения разгрузочных поясков.
Защищены авторскими свидетельствами на изобретения конструкции уплотнений разъёмных соединений по методам герметизации крупногабаритных сосудов высокого давления.

### 5. Общая теория измерения физических величин и общая теория принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных состояний и процессов, прочности и технологичности элементов и систем техники высоких давлений с учётом трения, взаимных сцепления и проскальзывания и концентрации напряжений

В трёхмерной осесимметричной упругой задаче (рис. 8, а) без объёмных сил и кручения в цилиндрической системе координат $r$, $z$ с началом на оси и срединной плоскости составного цилиндра (можно считать его двухслойным и наподобие шага в математической индукции сводить к последовательности задач для двухслойного цилиндра задачу при большем числе слоёв отделением внешнего слоя и рассмотрением соединения остальных слоёв как единого внутреннего слоя с наложением (суперпозицией) соответствующих решений) произвольной конечной длины $2H$ есть технологии тепловой сборки и запрессовки. Возможны различные модули продольной упругости Юнга $E$ и коэффициенты поперечной деформации Пуассона $\mu$ $E_1$ и $\mu_1$ внутреннего слоя ($r_1 \le r \le r_c + \delta_c r_c$) и $E_2$ и $\mu_2$ внешнего слоя ($r_c \le r \le r_2$) составного цилиндра конечной длины $2H$ с $-H \le z \le H$ с коэффициентом трения покоя $k_0$ слоёв цилиндра.
При $H > H'$ на срединном участке $|z| \le H - H'$ взаимного осевого сцепления слоёв цилиндра при тепловой сборке с нагревом внешнего слоя разность осевых деформаций внешнего $\varepsilon_{z2}$ и внутреннего $\varepsilon_{z1}$ слоёв остаётся равной относительному радиальному натягу: $\varepsilon_{z2} - \varepsilon_{z1} = \delta_c$;
формулы для сборочных контактного давления $p_c$ и осевых напряжений в слоях $\sigma_{z1}$ и $\sigma_{z2}$

$$p_c = \delta_c\{1 + [\mu_2 E_1(r_c^2 - r_1^2) + \mu_1 E_2(r_2^2 - r_c^2)]/[E_1(r_c^2 - r_1^2) + E_2(r_2^2 - r_c^2)]\}\{(1 - \mu_1)E_1^{-1}r_c^2/(r_c^2 - r_1^2) + (1 + \mu_1)E_1^{-1}r_1^2/(r_c^2 - r_1^2) + (1 - \mu_2)E_2^{-1}r_c^2/(r_2^2 - r_c^2) + (1 + \mu_2)E_2^{-1}r_2^2/(r_2^2 - r_c^2) - 2r_c^2[\mu_1 E_1^{-1}/(r_c^2 - r_1^2) + \mu_2 E_2^{-1}/(r_2^2 - r_c^2)][\mu_2 E_1(r_c^2 - r_1^2) + \mu_1 E_2(r_2^2 - r_c^2)]/[E_1(r_c^2 - r_1^2) + E_2(r_2^2 - r_c^2)]\}^{-1}; \sigma_{z2} = -(r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1}\sigma_{z1} = \{\delta_c + 2p_c r_c^2[\mu_1 E_1^{-1}/(r_c^2 - r_1^2) + \mu_2 E_2^{-1}/(r_2^2 - r_c^2)]\}/[E_1^{-1}(r_c^2 - r_1^2)^{-1}(r_2^2 - r_c^2) + E_2^{-1}]; \text{ при } E_1 = E_2 = E,\ \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

$$\sigma_{z1} = -2p_c r_c^2/(r_c^2 - r_1^2);\ \sigma_{z2} = 2p_c r_c^2/(r_2^2 - r_c^2);\ p_c = (1 - \mu)^{-1}E\delta_c(r_2^2 - r_c^2)(r_c^2 - r_1^2)/[2r_c^2(r_2^2 - r_1^2)]$$

взамен $p_c$, заниженного плоскими напряжённым состоянием короткого цилиндра в $1/(1 - \mu) \approx 1.43$ раза и деформацией длинного цилиндра В. Д. Лубенца в $1 + \mu = 1.3$ раза ($\mu = 0.3$, сталь).
На торцевых участках $H - H' \le |z| \le H$ осевого проскальзывания $A_c p_c(z) - B_c\int_{|z|}^{H} p_c(z')dz' = \delta_c$,

$$A_c = [(1 - \mu_1)r_c^2 + (1 + \mu_1)r_1^2]/[E_1(r_c^2 - r_1^2)] + [(1 - \mu_2)r_c^2 + (1 + \mu_2)r_2^2]/[E_2(r_2^2 - r_c^2)],$$

$$B_c = 2k_0 r_c\{\mu_1/[E_1(r_c^2 - r_1^2)] + \mu_2/[E_2(r_2^2 - r_c^2)]\};\ p_c(z) = (\delta_c/A_c)\exp[(B_c/A_c)(H - |z|)];$$

$$\sigma_{z1}(z) = -2k_0 r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}(\delta_c/B_c)\{\exp[(B_c/A_c)(H - |z|)] - 1\};\ \sigma_{z2}(z) = 2k_0 r_c(r_2^2 - r_c^2)^{-1}(\delta_c/B_c)\{\exp[(B_c/A_c)(H - |z|)] - 1\};\ H' = [r_c/(k_0\mu)]\ln(1 - \mu)^{-1} \text{ при } E_1 = E_2 = E,\ \mu_1 = \mu_2 = \mu \text{ (рис. 8, б).}$$

Для равнопрочности по длине $p_c(z) = p_c = constant$; при $H - H_0 \le |z| \le H$, $H_0 = A_c/B_c - \delta_c/(B_c p_c)$,

$$\delta_c(z) = (A_c - B_c H + B_c|z|)p_c:\ \sigma_{z1}(z) = -2k_0 r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}p_c(H - |z|);\ \sigma_{z2}(z) = 2k_0 r_c(r_2^2 - r_c^2)^{-1}p_c(H - |z|).$$

При $E_1 = E_2 = E$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$: $H_0 = r_c/k_0 < H' = r_c k_0^{-1}\mu^{-1}\ln(1 - \mu)^{-1}$; у торцов при $H - H_0 \le |z| \le H$

$$p_c(z) = (1 - \mu)p_c\exp[k_0\mu r_c^{-1}(H - |z|)],\ \sigma_{z1}(z) = - 2(1/\mu - 1)r_c^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}p_c\{\exp[k_0\mu r_c^{-1}(H - |z|)] - 1\},$$

$$\sigma_{z2}(z) = 2(1/\mu - 1)r_c^2(r_2^2 - r_c^2)^{-1}p_c\{\exp[k_0\mu r_c^{-1}(H - |z|)] - 1\}.$$

Наилучшее по длине распределение относительного нат<u>я</u>га (рис. 8, в)

$$\delta_c(z) = \delta_c = (1 - \mu)p/E,\ 0 \le |z| \le H - r_c/k_0;\ \delta_c(z) = [1 - k_0\mu r_c^{-1}(H - |z|)]p/E,\ H - r_c/k_0 \le |z| \le H.$$

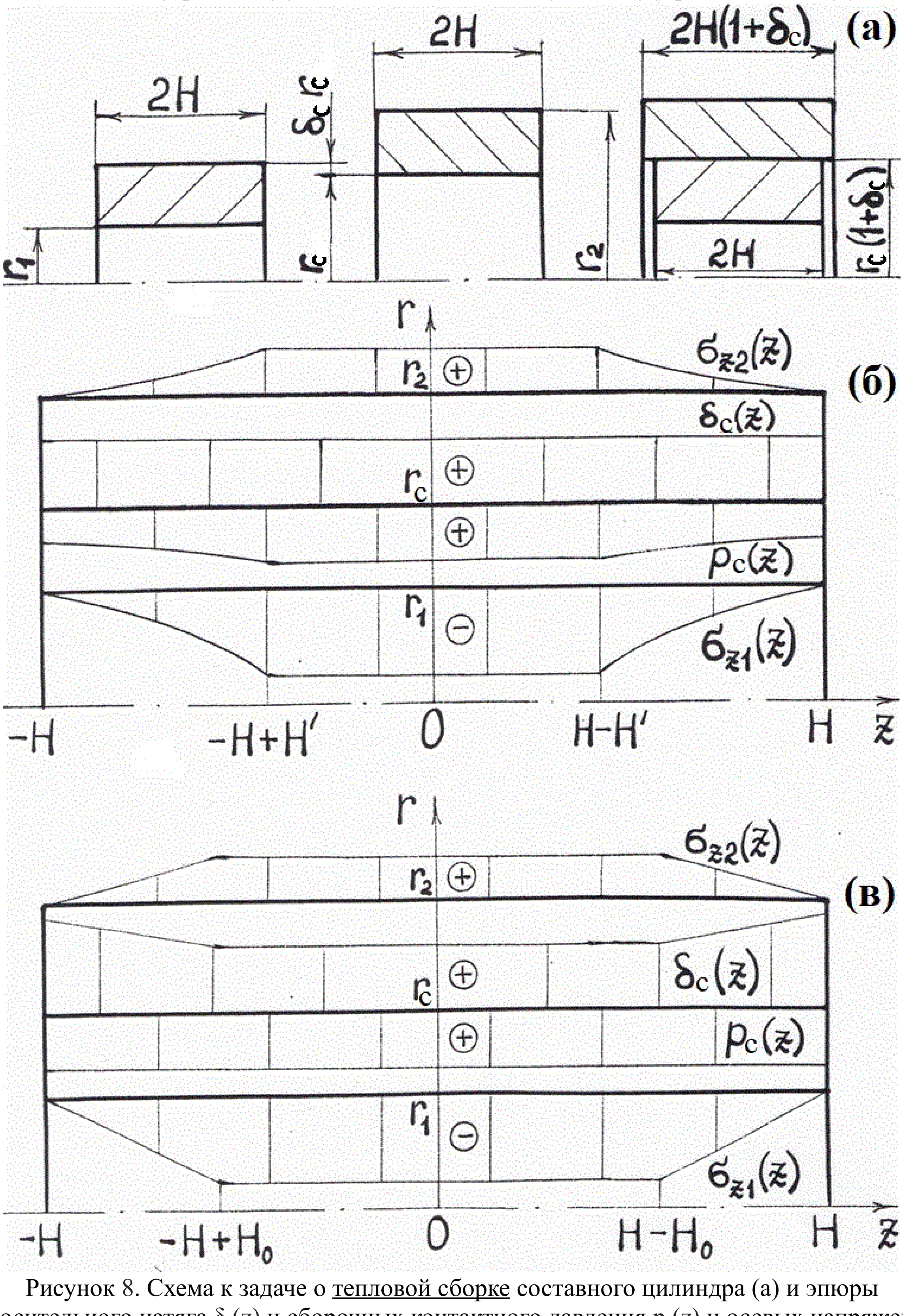



Рисунок 8. Схема к задаче о <u>тепловой сборке</u> составного цилиндра (а) и эпюры относительного нат<u>я</u>га $\delta_c(z)$ и сборочных контактного давления $p_c(z)$ и осевых напряжений $\sigma_{z1}(z)$ и $\sigma_{z2}(z)$ в собранном тепловым способом составном цилиндре конечной длин<u>ы</u> при равномерном вдоль ос<u>и</u> (б) и наилучшем (в) нат<u>я</u>гах в установившихся состояниях.

В конце (рис. 9) запрессовки (рис. 9, 10) цилиндра $\sigma_{z1}(-H) = -p_z$, $\sigma_{z2}(H) = -p_z(r_c^2 - r_1^2)/(r_2^2 - r_c^2)$.

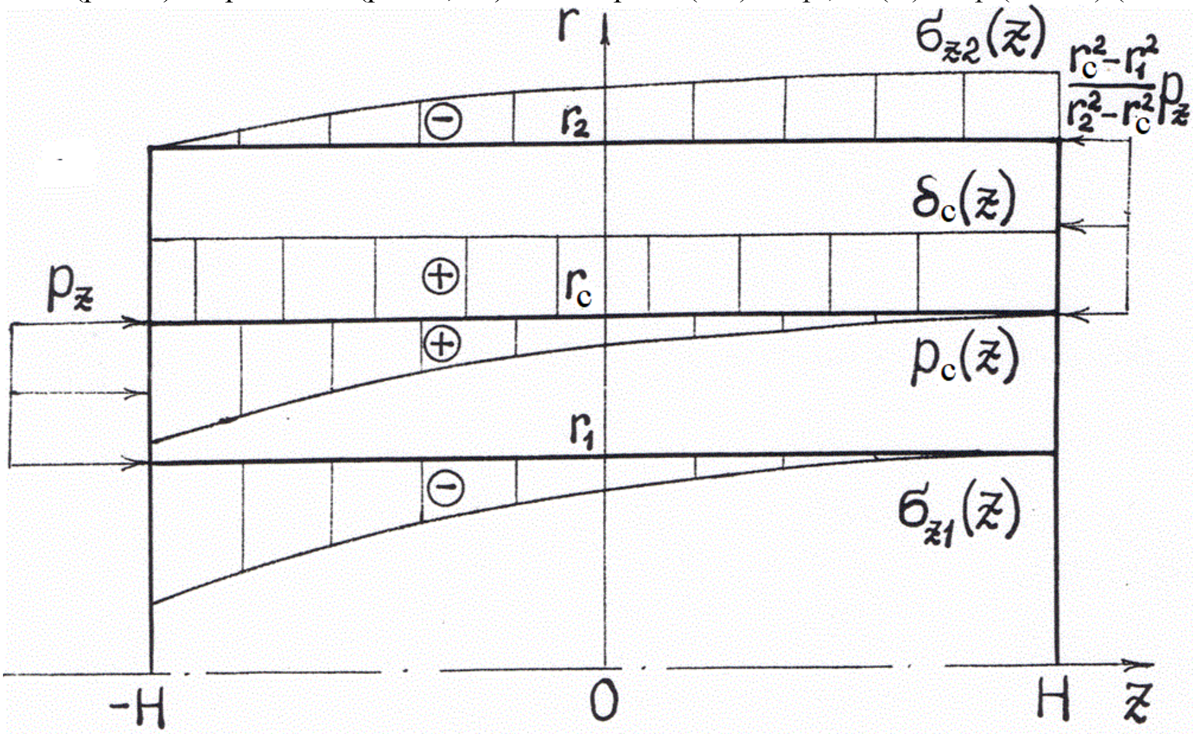



Рисунок 9. Эпюры относительного натяга $\delta_c(z)$ и сборочных контактного давления $p_c(z)$ и осевых напряжений $\sigma_{z1}(z)$ и $\sigma_{z2}(z)$ в слоях собранного запрессовкой составного цилиндра конечной длины с равномерным вдоль оси натягом при наибольшем усилии запрессовки в установившемся состоянии в первой задаче о запрессовке составного цилиндра.

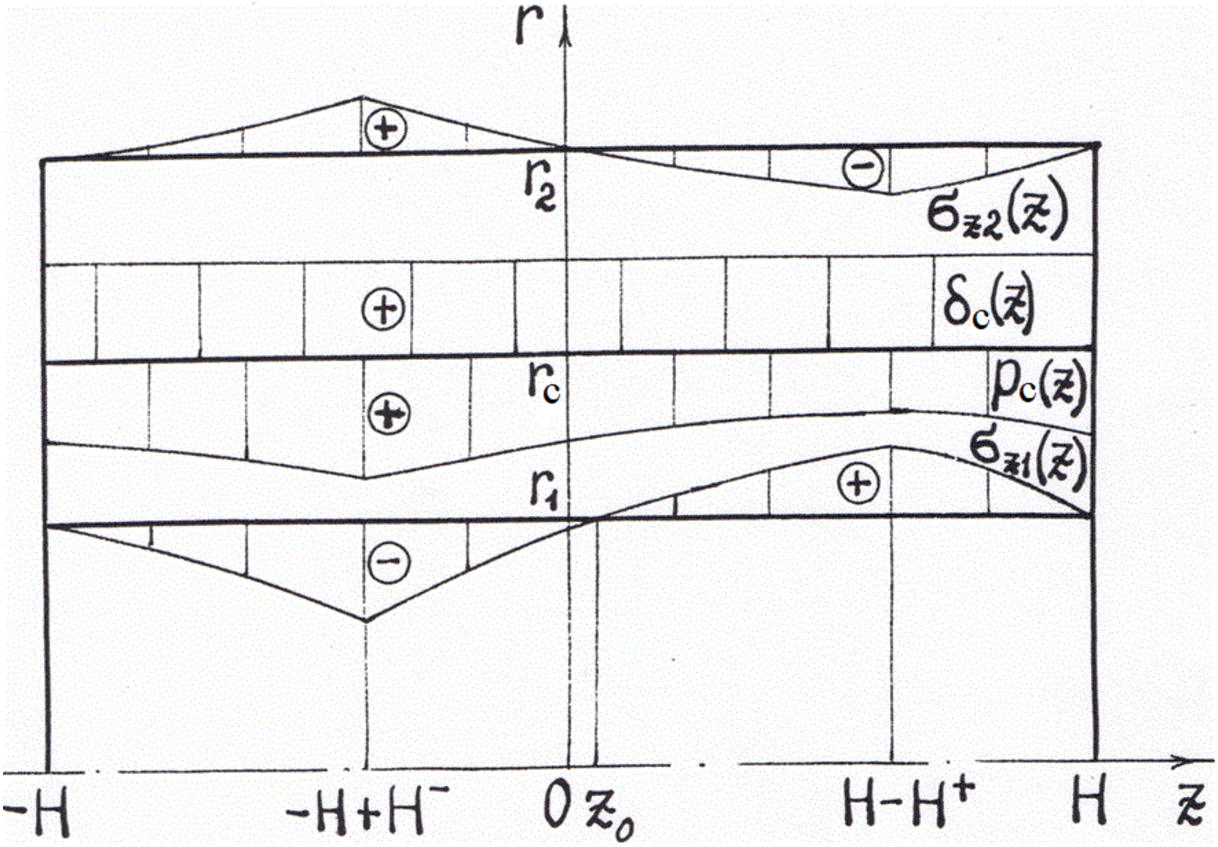



Рисунок 10. Эпюры относительного натяга $\delta_c(z)$ и сборочных контактного давления $p_c(z)$ и осевых напряжений $\sigma_{z1}(z)$ и $\sigma_{z2}(z)$ в слоях собранного запрессовкой составного цилиндра конечной длины с равномерным вдоль оси натягом после сброса усилия запрессовки в установившемся состоянии во второй задаче о запрессовке составного цилиндра.

В первой задаче о запрессовке усилием $Q = \pi(r_c^2 - r_1^2)p_z$ с конечным пределом при $H \to \infty$ ввиду пуассонова поперечного эффекта осевых напряжений в слоях составного цилиндра

$\sigma_{z1}(z) = - p_z + 2k_0r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}\int_{-H}^{z}p_c(z')dz'$; $\sigma_{z2}(z) = - p_z(r_c^2 - r_1^2)/(r_2^2 - r_c^2) + 2k_0r_c(r_2^2 - r_c^2)^{-1}\int_z^H p_c(z')dz'$; $p_z = \delta_c[\exp(2B_cH/A_c)-1]/[\mu_1/E_1 + \mu_2E_2^{-1}(r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1}\exp(2B_cH/A_c)]$; $p_c(z) = \delta_cA_c^{-1}C_c^{-1}\exp[(B_c/A_c)(H - z)]$; $C_c = [1 + \mu_1^{-1}E_1\mu_2E_2^{-1}(r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1}\exp(2B_cH/A_c)]/[1 + \mu_1^{-1}E_1\mu_2E_2^{-1}(r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1}]$;

$\sigma_{z1}(z) = 2k_0r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}\delta_cB_c^{-1}C_c^{-1}\{1 - \exp[(B_c/A_c)(H - z)]\}$; $\sigma_{z2}(z) = 2k_0r_c(r_2^2 - r_c^2)^{-1}\delta_cB_c^{-1}C_c^{-1}\{\exp[(B_c/A_c)(H - z)] - \exp(2B_cH/A_c)\}$; $p_z = 2k_0r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}\delta_cB_c^{-1}C_c^{-1}[\exp(2B_cH/A_c) - 1]$ (см. рис. 9).

При $E_1 = E_2 = E$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$: $p_z = \mu^{-1}E\delta_c(r_2^2 - r_c^2)[\exp(2k_0\mu H/r_c) - 1]/[(r_c^2 - r_1^2)\exp(2k_0\mu H/r_c) + r_2^2 - r_c^2]$; $Q = \pi\mu^{-1}E\delta_c(r_2^2 - r_c^2)(r_c^2 - r_1^2)[\exp(2k_0\mu H/r_c) - 1]/[(r_c^2 - r_1^2)\exp(2k_0\mu H/r_c) + r_2^2 - r_c^2]$;

$p_c(z) = (1/2)E\delta_cr_c^{-2}(r_2^2 - r_c^2)(r_c^2 - r_1^2)[\exp(2k_0\mu H/r_c) - 1]/[(r_c^2 - r_1^2)\exp(2k_0\mu H/r_c) + r_2^2 - r_c^2]$;

$\sigma_{z1}(z) = \mu^{-1}E\delta_c(r_2^2 - r_c^2)\{1 - \exp[k_0\mu(H - z)/r_c]\}/[(r_c^2 - r_1^2)\exp(2k_0\mu H/r_c) + r_2^2 - r_c^2]$;

$\sigma_{z2}(z) = \mu^{-1}E\delta_c(r_c^2 - r_1^2)\{\exp[k_0\mu(H - z)/r_c] - \exp(2k_0\mu H/r_c)\}/[(r_c^2 - r_1^2)\exp(2k_0\mu H/r_c) + r_2^2 - r_c^2]$.

Во второй задаче о запрессовке составного цилиндра после сброса её усилий (см. рис. 10) на левом торцевом участке $(- H) \le z \le - H + H^-$ взаимного осевого проскальзывания слоёв

$A_cp_c(z) - B_c\int_{-H}^{z}p_c(z')dz' = \delta_c$; $p_c(z) = \delta_cA_c^{-1}\exp[(B_c/A_c)(z + H)]$; $\sigma_{z1}(z) = - 2k_0r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}(\delta_c/B_c)\{\exp[(B_c/A_c)(z + H)] - 1\}$; $\sigma_{z2}(z) = 2k_0r_c(r_2^2 - r_c^2)^{-1}(\delta_c/B_c)\{\exp[(B_c/A_c)(z + H)] - 1\}$;

на правом торцевом участке $H - H^+ \le z \le H$ взаимного осевого проскальзывания слоёв

$A_cp_c(z) + B_c\int_z^H p_c(z')dz' = \delta_c$; $p_c(z) = \delta_cA_c^{-1}\exp[(B_c/A_c)(z - H)]$; $\sigma_{z1}(z) = 2k_0r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}(\delta_c/B_c)\{1 - \exp[(B_c/A_c)(z - H)]\}$; $\sigma_{z2}(z) = - 2k_0r_c(r_2^2 - r_c^2)^{-1}(\delta_c/B_c)\{1 - \exp[(B_c/A_c)(z - H)]\}$;

на промежуточном участке взаимного осевого сцепления слоёв цилиндра $-H + H^- \le z \le H - H^+$

$p_c(z) = (\mu_2 - \mu_1)D_c/E_c + \delta_cA_c^{-1}C_c^{-1}\exp[(B_c/A_c)(H - z)]$; $D_c = 2k_0r_c\delta_cB_c^{-1}C_c^{-1}[\exp(2B_cH/A_c) - 1]$;

$E_c = [E_1(r_c^2 - r_1^2) + E_2(r_2^2 - r_c^2)]A_c - [\mu_2E_1(r_c^2 - r_1^2) + \mu_1E_2(r_2^2 - r_c^2)]B_cr_c/k_0$; $M = (\mu_2 - \mu_1)A_cC_cD_cE_c^{-1}\delta_c^{-1}$;

$\sigma_{z1}(z) = (A_c - \mu_2B_cr_c/k_0)E_1D_c/E_c + 2k_0r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}\delta_cB_c^{-1}C_c^{-1}\{1 - \exp[(B_c/A_c)(H - z)]\}$;

$\sigma_{z2}(z) = (A_c - \mu_1B_cr_c/k_0)E_2D_c/E_c + 2k_0r_c(r_2^2 - r_c^2)^{-1}\delta_cB_c^{-1}C_c^{-1}\{\exp[(B_c/A_c)(H - z)] - \exp(2B_cH/A_c)\}$;

$H^- = A_cB_c^{-1}\ln\{(1/2)MC_c^{-1}+[(1/4)M^2C_c^{-2} + C_c^{-1}\exp(2B_cH/A_c)]^{1/2}\}$; $H^+ = A_cB_c^{-1}\ln[- M/2 + (M^2/4 + C_c)^{1/2}]$;

для любых $E_1$ и $E_2$ при $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ $M = 0$; $H^- = H - (1/2)A_cB_c^{-1}\ln C_c = H - H^+$, $H^+ = (1/2)A_cB_c^{-1}\ln C_c$.

При $E_1 = E_2 = E$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$: $H^- = H - (1/2)r_ck_0^{-1}\mu^{-1}\ln\{[(r_c^2 - r_1^2)\exp(2k_0\mu H/r_c) + r_2^2 - r_c^2]/(r_2^2 - r_1^2)\}$;

$H^+ = (1/2)r_ck_0^{-1}\mu^{-1}\ln\{[(r_c^2 - r_1^2)\exp(2k_0\mu H/r_c) + r_2^2 - r_c^2]/(r_2^2 - r_1^2)\}$; $H^- + H^+ = H$; $0 < H^- < H$;

$0 < H^+ < H$; $\lim H^- = H$ $(r_c \to r_1)$; $\lim H^- = 0$ $(r_c \to r_2)$; $\lim H^+ = 0$ $(r_c \to r_1)$; $\lim H^+ = H$ $(r_c \to r_2)$;

при $- H \le z \le - H + H^-$: $p_c(z) = (1/2)E\delta_cr_c^{-2}(r_2^2 - r_c^2)(r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)^{-1}\exp[k_0\mu r_c^{-1}(H + z)]$; $\sigma_{z1}(z) = - \mu^{-1}E\delta_c(r_2^2 - r_c^2)(r_2^2 - r_1^2)^{-1}\{\exp[k_0\mu r_c^{-1}(H+z)]-1\}$; $\sigma_{z2}(z) = \mu^{-1}E\delta_c(r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)^{-1}\{\exp[k_0\mu r_c^{-1}(H+z)] -1\}$;

при $- H + H^- \le z \le H - H^+$: $p_c(z) = (1/2)E\delta_cr_c^{-2}(r_2^2 - r_c^2)(r_c^2 - r_1^2)[(r_c^2 - r_1^2)\exp(2k_0\mu H/r_c) + r_2^2 - r_c^2]^{-1}\exp[k_0\mu r_c^{-1}(H - z)]$; $\sigma_{z1}(z) = \mu^{-1}E\delta_c(r_2^2 - r_c^2)[(r_c^2 - r_1^2)\exp(2k_0\mu H/r_c) + r_2^2 - r_c^2]^{-1}\{(r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)^{-1}[\exp(2k_0\mu H/r_c) - 1] + 1 - \exp[k_0\mu r_c^{-1}(H - z)]\}$; $\sigma_{z2}(z) = \mu^{-1}E\delta_c(r_c^2 - r_1^2)[(r_c^2 - r_1^2)\exp(2k_0\mu H/r_c) + r_2^2 - r_c^2]^{-1}\{(r_2^2 - r_c^2)(r_2^2 - r_1^2)^{-1}[\exp(2k_0\mu H/r_c) - 1] + \exp[k_0\mu r_c^{-1}(H - z)] - \exp(2k_0\mu H/r_c)\}$;

при $H-H^+ \le z \le H$: $p_c(z) = (1/2)E\delta_cr_c^{-2}(r_2^2 - r_c^2)(r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)^{-1}\exp[k_0\mu r_c^{-1}(z - H)]$; $\sigma_{z1}(z) = \mu^{-1}E\delta_c(r_2^2 - r_c^2)(r_2^2 - r_1^2)^{-1}\{1 - \exp[k_0\mu r_c^{-1}(z - H)]\}$; $\sigma_{z2}(z) = - \mu^{-1}E\delta_c(r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)^{-1}\{1 - \exp[k_0\mu r_c^{-1}(z - H)]\}$.

Для равнопрочности по длине (рис. 11) в первой задаче $\delta_c(z) = -\mu_1p_z/E_1 + [A_c + B_c(H + z)]p_c'$;

$p_c(z) = p_c = p_c' + (\mu_2 - \mu_1)D_c'/E_c$; $D_c' = 4k_0r_cHp_c'E_c/[E_c + 4(\mu_2 - \mu_1)k_0r_cH]$; $p_z' = 4k_0r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}Hp_c'$;

$\sigma_{z1}(z) = - p_z' + 2k_0r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}p_c'(H + z)$; $\sigma_{z2}(z) = - p_z'(r_c^2 - r_1^2)/(r_2^2 - r_c^2) + 2k_0r_c(r_2^2 - r_c^2)^{-1}p_c'(H - z)$;

во второй задаче после сброса $Q = 4\pi k_0r_cHp_c'$; при $-H \le z \le - H + H_0^-$ $\delta_c(z) = [A_c + B_c(H - z)]p_c$,

при $H - H_0^+ \le z \le H$ $\delta_c(z) = [A_c - B_c(H + z)]p_c$; $H_0^- = [\mu_1p_z/E_1 + (\mu_2 - \mu_1)A_cD_c'/E_c]/[2B_cp_c + (\mu_1 - \mu_2)B_cD_c'/E_c]$; $H_0^+ = H - [\mu_1p_z/E_1 + (\mu_2 - \mu_1)(A_c + B_cH)D_c'/E_c]/[2B_cp_c + (\mu_1 - \mu_2)B_cD_c'/E_c]$;

при $-H \le z \le - H + H_0^-$ $\sigma_{z1}(z) = - 2k_0r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}p_c(H + z)$; $\sigma_{z2}(z) = 2k_0r_c(r_2^2 - r_c^2)^{-1}p_c(H + z)$;

при $-H + H_0^- \le z \le H - H_0^+$ $\sigma_{z1}(z) = (A_c - \mu_2B_cr_c/k_0)E_1D_c'/E_c - p_z' + 2k_0r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}p_c'(H + z)$;

$\sigma_{z2}(z) = (A_c - \mu_1B_cr_c/k_0)E_2D_c'/E_c - (r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1}p_z' + 2k_0r_c(r_2^2 - r_c^2)^{-1}p_c'(H - z)$;

при $H - H_0^+ \le z \le H$ $\sigma_{z1}(z) = 2k_0r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}p_c(H - z)$; $\sigma_{z2}(z) = - 2k_0r_c(r_2^2 - r_c^2)^{-1}p_c(H - z)$.

При $E_1 = E_2 = E$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$: $H_0^- = H(r_2^2 - r_c^2)/(r_2^2 - r_1^2)$; $H_0^+ = H(r_c^2 - r_1^2)/(r_2^2 - r_1^2)$;

при $-H \le z \le - H + H_0^-$ $\delta_c(z) = 2p_cE^{-1}r_c^2(r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1}(r_c^2 - r_1^2)^{-1}[1 - k_0\mu(H + z)/r_c]$;

$\sigma_{z1}(z) = - 2k_0r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}p_c(H + z)$; $\sigma_{z2}(z) = 2k_0r_c(r_2^2 - r_c^2)^{-1}p_c(H + z)$;

при $-H + H_0^- \le z \le H - H_0^+$ $\delta_c(z) = 2p_cE^{-1}r_c^2(r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1}(r_c^2 - r_1^2)^{-1}[1 - k_0\mu r_c^{-1}H(r_2^2 - 2r_c^2+ r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)^{-1} + k_0\mu r_c^{-1}z]$; $\sigma_{z1}(z) = 2k_0r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}p_c[- H(r_2^2 - 2r_c^2+ r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)^{-1} + z]$;

$$\sigma_{z2}(z) = 2k_0r_c(r_2^2 - r_c^2)^{-1}p_c[H(r_2^2 - 2r_c^2 + r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)^{-1} - z];$$

при $H - H_0^+ \le z \le H$ $\delta_c(z) = 2p_cE^{-1}r_c^2(r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1}(r_c^2 - r_1^2)^{-1}[1 + k_0\mu(H - z)/r_c]$;

$$\sigma_{z1}(z) = 2k_0r_c(r_c^2 - r_1^2)^{-1}p_c(H - z);\ \sigma_{z2}(z) = - 2k_0r_c(r_2^2 - r_c^2)^{-1}p_c(H - z).$$

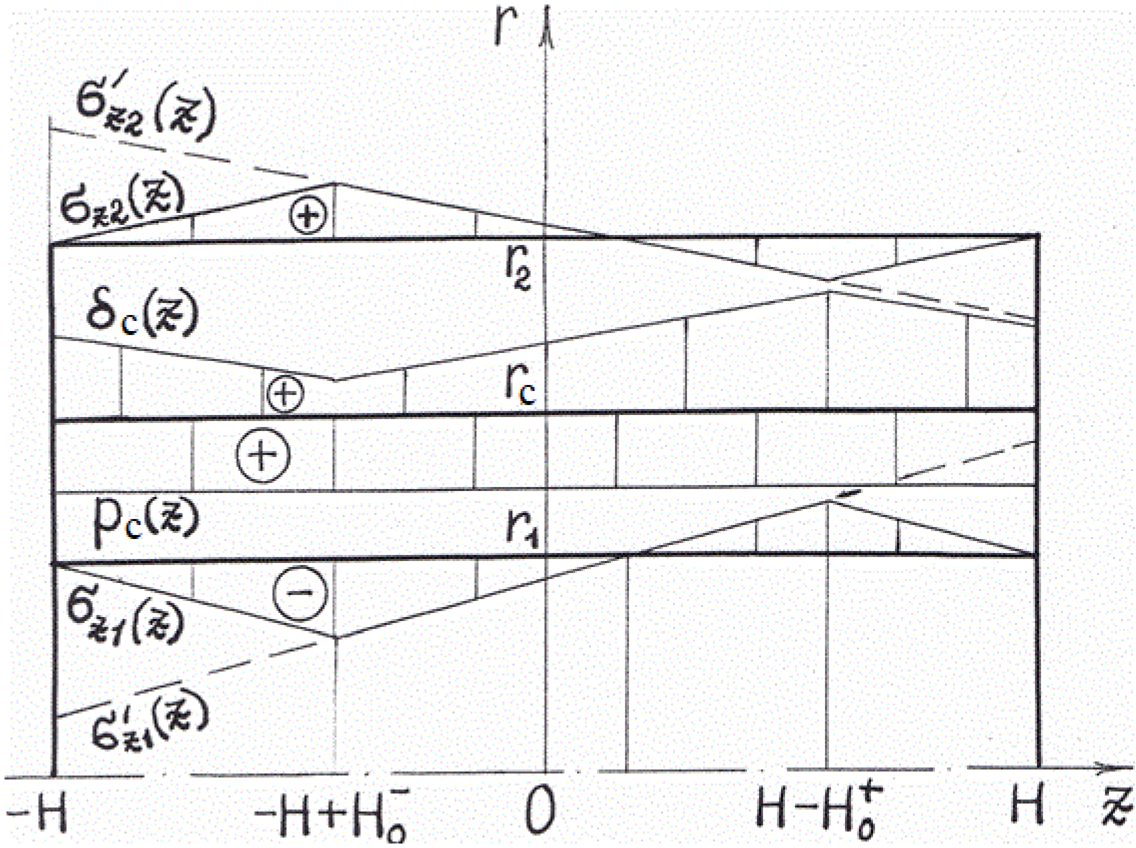



Рисунок 11. Эпюры относительного натяга $\delta_c(z)$ и сборочных контактного давления $p_c(z)$ и осевых напряжений $\sigma_{z1}(z)$ и $\sigma_{z2}(z)$ в слоях собранного запрессовкой составного цилиндра конечной длины с неравномерным вдоль оси наилучшим натягом в установившемся состоянии.

Теория трёхмерного напряжённо-деформированного процесса при запрессовке составного цилиндра конечной длины открыла и обосновала следующие явления и закономерности:

1) положительные максимумы $\sigma_{z1max}$ и $\sigma_{z2max}$ осевых напряжений в слоях $\sigma_{z1}(z)$ и $\sigma_{z2}(z)$ на границах промежуточного участка сцепления со сторон первоначально свободных торцов слоёв равны между собой и среднему геометрическому отрицательных их минимумов $\sigma_{z1min}$ и $\sigma_{z2min}$ на границах промежуточного участка со стороны первоначально сжатых торцов слоёв:

$$\sigma_{z1max} = \sigma_{z1}(H - H_0^+) = \sigma_{z2max} = \sigma_{z2}(- H + H_0^-) = 2k_0r_cH(r_c^2 - r_1^2)^{-1}p_c;\ \sigma_{z1min} = \sigma_{z1}(- H + H_0^-) = - 2k_0r_cH(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_c(r_2^2 - r_c^2)(r_c^2 - r_1^2)^{-1};\ \sigma_{z2min} = \sigma_{z2}(H - H_0^+) = - 2k_0r_cH(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_c(r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1};$$

2) наклоны участков каждой из эпюр $\delta_c(z)$, $\sigma_{z1}(z)$ и $\sigma_{z2}(z)$ по модулю постоянны и меняют лишь знак, так что границы промежуточного участка взаимного осевого сцепления слоёв делят пополам участки между общим нулём этих эпюр и соответствующим торцом;

3) для общего обнуления эпюр $\delta_c(z)$, $\sigma_{z1}(z)$ и $\sigma_{z2}(z)$ на срединной плоскости $z = 0$ и вообще для обратносимметричности эпюр $\sigma_{z1}(z)$ и $\sigma_{z2}(z)$ и для $H_0^- = H_0^+ = H/2$ необходимо и достаточно равенство продольных жёсткостей слоёв при среднеквадратичности $r_c = [(r_1^2 + r_2^2)/2]^{1/2}$;

4) положительные ординаты пересечений с первоначально свободными торцами продолжений $\sigma_{z1}'(z)$ и $\sigma_{z2}'(z)$ эпюр $\sigma_{z1}(z)$ и $\sigma_{z2}(z)$ на промежуточном участке сцепления равны между собой и среднему геометрическому отрицательных ординат пересечений продолжений с первоначально сжатыми торцами, при этом названные ординаты являются удвоениями максимумов $\sigma_{z1max}$ и $\sigma_{z2max}$ и минимумов $\sigma_{z1min}$ и $\sigma_{z2min}$: $\sigma_{z1}'(H) = \sigma_{z2}'(- H) = 4k_0r_cH(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_c$;

$$\sigma_{z1}'(- H) = - 4k_0r_cH(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_c(r_2^2 - r_c^2)(r_c^2 - r_1^2)^{-1};\ \sigma_{z2}'(H) = - 4k_0r_cH(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_c(r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1}.$$

По теории оптимизации технологичности, статической и циклической прочности составного цилиндра конечной длины равносильны $p_c(z) = \mathrm{constant}$ и $\sigma_{e\max}(z) = \mathrm{constant}$. Выбираются наилучшие $r_c$ и $p_c$, а $\delta_c(z)$ по решениям трёхмерных задач для составного цилиндра конечной длины, в т. ч. при тепловой сборке или запрессовке. Тепловая сборка даёт симметрию относительно середины. Запрессовка полезна при крупногабаритности и для обратимости.

Предложена и обоснована обратимая технология сжатия-растяжения для сборки-разборки соединений с натягом, основанная на явлении поперечной деформации, с осевым сжатием охватывающей внешней и/или осевым растяжением охватываемой внутренней детали.

В задаче циклической прочности для составного цилиндра конечной длины при внутреннем давлении $p$ в пределах $p_{\min}...p_{\max}$ среднее давление цикла $p_m = (p_{\max} + p_{\min})/2$ и амплитудное давление цикла $p_a = (p_{\max} - p_{\min})/2$. По формулам Ламе равносильные (эквивалентные) по третьей теории прочности напряжения во внутреннем и внешнем слоях составного цилиндра

$$\sigma_{e1}(r) = 2pr_1^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}r_2^2/r^2 - 2p_cr_c^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}r_1^2/r^2, \sigma_{e2}(r) = 2pr_1^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}r_2^2/r^2 + 2p_cr_c^2(r_2^2 - r_c^2)^{-1}r_2^2/r^2.$$

Наиболее опасны напряжённые состояния внутренних поверхностей обоих слоёв. Средние и амплитудные равносильные (эквивалентные) напряжения циклов соответственно

$$\sigma_{e1m}(r_1) = 2p_mr_2^2/(r_2^2 - r_1^2) - 2p_cr_c^2/(r_c^2 - r_1^2); \sigma_{e1a}(r_1) = 2p_ar_2^2/(r_2^2 - r_1^2);$$

$$\sigma_{e2m}(r_c) = 2p_mr_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}r_1^2/r_c^2 + 2p_cr_2^2/(r_2^2 - r_c^2); \sigma_{e2a}(r_c) = 2p_ar_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}r_1^2/r_c^2.$$

По приближению Гудмена диаграммы Хэя для циклической равнопрочности слоёв из одного материала сборочное контактное давление и обращённые запасы прочности слоёв

$$p_c = (p_m + p_a\sigma_u/\sigma_{-1})r_2^2r_c^{-2}(r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)^{-1}/[r_c^2/(r_c^2 - r_1^2) + r_2^2/(r_2^2 - r_c^2)];$$

$$1/n_1 = 1/n_2 = 1/n = 2(p_m/\sigma_u + p_a/\sigma_{-1})r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}\{1 - 1/[r_c^2/(r_c^2 - r_1^2) + r_2^2/(r_2^2 - r_c^2)]\},$$

а условия наилучшего проектирования составного цилиндра для циклического нагружения

$$r_c = (r_1r_2)^{1/2}; p_c = (1/2)(p_m + p_a\sigma_u/\sigma_{-1})(r_2 - r_1)/(r_2 + r_1); n = (1 - r_1/r_2)\sigma_u/(p_m + p_a\sigma_u/\sigma_{-1})$$

с обобщением статических формул А. В. Гадолина на трёхмерный циклический случай.

Открыт статический эквивалент циклического внутреннего давления в составном цилиндре

$$p_e = p_m + p_a\sigma_u/\sigma_{-1} \geq p_m + p_a = p_{\max} (p_a \geq 0), p_e = p_m + p_a\sigma_u/\sigma_{-1} > p_m + p_a = p_{\max} (p_a > 0).$$

Введены и использованы понятия линейно прочного материала (и тела), остаточно-рабочего простого нагружения и равносильного (эквивалентного) значения параметра действительного напряжённо-деформированного процесса линейно упругого и линейно прочного тела.

Уточнение по параболическому приближению Гербера $(\sigma_m/\sigma_u)^2 + \sigma_a/\sigma_{-1} = 1$

$$r_c = (r_1r_2)^{1/2}, p_c = (1/2)[p_m + (1/2)(1 - r_1/r_2)\sigma_u^2\sigma_{-1}^{-1}p_a/p_m](r_2 - r_1)/(r_2 + r_1) \text{ } (p_m = 0 \text{ влечёт } p_a = 0)$$

даёт зависимость $p_e = p_m + (1/2)(1 - r_1/r_2)\sigma_u^2\sigma_{-1}^{-1}p_a/p_m$ от $r_2/r_1$ с утратой универсальности выше.

Диаграмма усталостной прочности Хэя $f(\sigma_m/\sigma_u, \sigma_a/\sigma_{-1}) = 1$ или $\sigma_m/\sigma_u = f_1(\sigma_a/\sigma_{-1})$ $(\sigma_m \geq 0)$ даёт $r_c = (r_1r_2)^{1/2}$ и для $p_c$ уравнение $f[- 2r_2(r_2 - r_1)^{-1}p_c/\sigma_u + 2r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_m/\sigma_u, 2r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_a/\sigma_{-1}] = f[2r_2(r_2 - r_1)^{-1}p_c/\sigma_u + 2r_1r_2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_m/\sigma_u, 2r_1r_2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_a/\sigma_{-1}]$ или $p_c =\sigma_mr_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}\{f_1[2r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}r_1^2r_c^{-2}p_a/\sigma_{-1}] - r_1^2r_c^{-2}f_1[2r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_a/\sigma_{-1}]\}/\{r_2^2(r_2^2 - r_c^2)^{-1}f_1[2r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_a/\sigma_{-1}] + r_c^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}f_1[2r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}r_1^2r_c^{-2}p_a/\sigma_{-1}]\}$ с обращённым общим запасом циклической прочности слоёв $1/n_1 = 1/n_2 = 1/n = 2(p_m/\sigma_u)/\{(r_2^2 - r_c^2)r_2^{-2}f_1[2r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}r_1^2r_c^{-2}p_a/\sigma_{-1}] + (r_c^2 - r_1^2)r_c^{-2}f_1[2r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_a/\sigma_{-1}]\}$ и с $r_c$, аннулирующим производную $(r_2^2 - r_c^2)r_2^{-2}f_1[2r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}r_1^2r_c^{-2}p_a/\sigma_{-1}] + (r_c^2 - r_1^2)r_c^{-2}f_1[2r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_a/\sigma_{-1}]$ по $r_c^2$. $f_1(\sigma_a/\sigma_{-1}) = 1 - \sigma_a/\sigma_{-1}$ даёт итог по приближению Гудмена. Его линейность необходима и достаточна для универсальности решения задачи циклической прочности.

Теория оптимизации составного цилиндра с учётом подлинных запасов прочности при сложном нагружении по общей, мультипликативной и аддитивной методологиям общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных позволяет уточнить условие равнопрочности слоёв составного цилиндра, в частности при $E_1 = E_2 = E$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

При априорном $r_c = (r_1r_2)^{1/2}$ по мультипликативной методологии $n$ из условия $n^3 - (1/2)(1 - r_1^2/r_2^2)(\sigma_u/p)n^2 - (r_1/r_2)n - (1/2)(1 - r_1^2/r_2^2)\sigma_u/p = 0$ даёт $p_{c0}$, а по аддитивно-мультипликативной методологии при $n = 1+ \delta$ и единой относительной погрешности $\delta_p = \delta$ с $\delta_{p(c0)} = k\delta$ $p_{c0} = (1/4)k^{-1}[(k - 1)r_2 - (k + 1)r_1]p/(r_1 + r_2) + (1/4)k^{-1}\{[(k - 1)r_2 - (k + 1)r_1]^2p^2/(r_1 + r_2)^2 + 4k(r_2 - r_1)^2r_2^{-1}(r_1 + r_2)^{-1}\sigma_up\}^{1/2}$, при $k = 1$ $p_{c0} = (1/2)\{- pr_1/(r_1 + r_2) + [p^2r_1^2/(r_1 + r_2)^2 + (r_2 - r_1)^2r_2^{-1}(r_1 + r_2)^{-1}\sigma_up]^{1/2}\}$. При $r_2 = 4r_1$, $p = \sigma_u/2$ по А. В. Гадолину $p_{c0} = 0.150\sigma_u$, по мультипликативной методологии $p_{c0} = 0.188\sigma_u$, по аддитивно-мультипликативной методологии $p_c = 0.194\sigma_u$ при $k = 1$ и $p_c = 0.175\sigma_u$ при $k = 3$.

Теория комплексной оптимизации составного цилиндра полным сжатием твердосплавного внутреннего слоя самоскреплённым (автофретированным) внешним слоем включает метод расчёта на усталостную прочность двухслойного цилиндра с натягом: металлокерамический внутренний слой предварительно сжат самоскреплённым (автофретированным) стальным корпусом с сочетанием преимуществ методов увеличения числа слоёв и самоскрепления (автофретирования) и увеличением эффекта скрепления при значительно меньших затратах.
Теория концентрации напряжений в несущих деталях сосудов высокого давления снижает наибольшую опасность концентрации напряжений у отверстий в корпусе и заглушках. Минимакс окружного напряжения $\min_{x0/y0}\max_{\varphi}\sigma_{\varphi}(\varphi)$ имеет место при отношении полуосей эллипса, равном отношению соответствующих напряжений вдали от эллиптического отверстия, сложенных с величиной давления на его контуре. При этом окружное напряжение постоянно по контуру и равно сумме главных напряжений вдали от отверстия и давления на его контуре. Наилучшее отношение полуосей эллипса равно двум и является инвариантом относительной толстостенности цилиндра с коэффициентом концентрации равносильного (эквивалентного) напряжения 1.5 взамен 2.5 для круглого отверстия. При увеличении радиуса радиального отверстия от нуля до внутреннего радиуса цилиндра отношение осей выхода отверстия растёт от 1 до $\pi/2 \approx 1.57$ и коэффициент концентрации напряжений снижается с 2.5 до 1.76. Рационально и смещение оси круглого сечения в поперечном сечении цилиндра, чтобы на развёртке внутренней поверхности цилиндра радиусом $r_1$ получить кривую выхода отверстия, близкую к эллипсу с двукратным отношением осей. Наряду с конструктивными способами упрочнения несущих деталей сосудов высокого давления с концентраторами напряжений могут использоваться и технологические; наиболее предпочтительно самоскрепление (автофретирование) с подобным рабочему нагружением.
Созданная общая теория измерения физических величин открыла явление самопогрешности (собственной погрешности) любых физических величины и объекта. Его самопогрешность как мера его неидеальности есть всеобщая погрешность формального равенства его и его идеальной расчётной схемы. Невязку их сопряжения общая теория невязок сопряжения минимизирует среднеквадратичным, минимаксным и коллокационным методами. Эталон любой физической величины имеет самопогрешность. Измерение неоднородной физической величины физическим прибором с конечными размерами и инертностью влечёт искажение модуляцией и запаздыванием. Выявлены проблемы и закономерности модуляции и созданы методы демодуляции при усреднении непрерывной переменной p(s) с весовой функцией, постоянной на отрезке длины $\Delta$ (постоянной прибора). Измерение даёт не истинную p(s), а среднее значение переменной p(s) по промежутку размером $\Delta$. Априорно рационален выбор промежутка $\Delta$ с серединой в s и минимумом математического ожидания погрешности измерения. Среднее значение равно $\Delta^{-1}\int_{s-\Delta/2}^{s+\Delta/2}p(t)dt$. Оператор измерения $M_{\Delta}$: $p(s) \rightarrow p_{\Delta}(s) = \Delta^{-1}\int_{s-\Delta/2}^{s+\Delta/2}p(t)dt$ может сузить область определения $S_{\Delta}$ функции $p_{\Delta}(s)$ по сравнению с областью определения S функции p(s) не более чем на $0.5\Delta$ от каждой из граничных точек для S независимо от характера изменения функции p(s). Обращение интегрального оператора $M_{\Delta}$ влечёт проблему существования, единственности и определения решения этого линейного неоднородного интегрального уравнения типа Вольтерра относительно p(s) при известной непрерывно дифференцируемой $p_{\Delta}(s)$. При разности $q(s) = p_2(s) - p_1(s)$ любых решений необходимые и вместе достаточные ограничения степени неоднозначности решения суть $\int_{s-\Delta/2}^{s+\Delta/2}q(t)dt = 0$ и $q(s + \Delta/2) = q(s - \Delta/2)$. Функция q(s) периодична с периодом $\Delta$, а её интеграл на периоде $\Delta$ равен нулю. Если вариация функции p(s) на любом отрезке длиной $\Delta$ хотя бы на порядок меньше минимума модуля p(s) на этом отрезке (правильно выбран измерительный прибор), то могут считаться имеющая период $\Delta$ и нулевое среднее значение на нём функция q(s) тождественно равной нулю и обращение оператора однозначным. В противоречащем случае необходимо и достаточно измерение и другим прибором с теоретически или практически несоизмеримой с $\Delta$ постоянной $\Delta'$ (наибольшая общая мера $\Delta$ и $\Delta'$ не существует или хотя бы на порядок меньше их минимума). Введены понятия действительной единоразмерности и практической несоизмеримости. Обычно известна не сама функция

$p_\Delta(s)$, а дискретная информация о ней (совокупность значений в ряде точек) с погрешностью измерений и априорная информация об области определения и характере изменения функции $p_\Delta(s)$. Можно выбрать, в ряд по каким стандартным функциям (степенным, показательным, логарифмическим, гиперболическим, тригонометрическим и т. д.) разложить функцию p(s) с поиском коэффициентов при этих стандартных функциях и/или их аргументах по известным значениям функции $p_\Delta(s)$ в ряде точек, то есть с решением системы уравнений (линейных, если коэффициенты при аргументах стандартных функций выбраны априорно). По принципу допустимой простоты число слагаемых в разложении искомой функции должно быть наименьшим, обеспечивающим достаточную близость совокупностей вычисленных и измеренных значений функции $p_\Delta(s)$ по приемлемой мере. Такой алгоритм ведёт к физически ясной простейшей математической модели и позволяет частично избавиться от погрешности разброса данных, например по общему методу наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов. Ввиду линейности оператора измерения $M_\Delta$ достаточно исследовать преобразование им стандартных функций. Обращение оператора формально можно заменить умножением образа на приемлемый коэффициент мультипликации $K_m$: $K_m$ = 1 для as + b (инвариант усреднения); $K_m = 0.5n\Delta/sh(0.5n\Delta)$ для exp(ns), sh(ns), ch(ns); $K_m = 0.5n\Delta/sin(0.5n\Delta)$ для sin(ns), cos(ns). Обратимы оператор $M_\Delta$ при других данных о прообразе и образе и обобщающий $M_\Delta$ оператор измерения или произвольной модуляции.

Приложение изложенного общего метода исправления погрешностей измерений произвольных неоднородных статических и динамических распределений создало общий метод исправления погрешностей измерений неоднородных распределений в задачах электротензометрии мест концентрации напряжений. Наибольшая деформация равна показанию тензорезистора соответствующей ориентации с коэффициентом мультипликации как функцией относительных размеров измерительной решётки тензорезистора и её относительного удаления от точки наибольшей концентрации напряжений и деформаций. По теории исправления погрешностей измерений при электротензометрии мест концентрации напряжений получается измерительная информация о напряжённо-деформированных состояниях элементов конструкций сложных конфигураций с инженерной точностью.

Для электротензометрии, других исследований и передачи энергии в зону высоких давлений нужны герметичные вводы. Принципиально новыми представлениями о деформировании трёхмерных осесимметричных тел по общим (полу)степенному и интегральному аналитическим методам макроэлементов и по соответствующим теориям обоснован ряд гермовводов, защищённых авторскими свидетельствами наряду с усовершенствованными средствами экспериментальных исследований и с сосудами высокого давления.

## 6. Создание теорий деформирования и прочности усложнённых элементов и соединений техники высоких давлений

Метод циклически прочного соединения разнородных материалов с рациональным выбором системы сборочных натягов и зазора в составном плунжере позволяет осуществить его потенциальные преимущества перед цельными твердосплавными и пластичными аналогами.

Метод совместного учёта конструктивной анизотропии и концентрации напряжений для деформирования и прочности конструктивно ортотропного цельнолитого корпуса прямоточного клапана как многосвязного осеасимметричного тела с двумя ортогональными срединной плоскости плоскостями симметрии позволяет оптимизировать его конструкцию.

Теория циклической прочности при концентрации напряжений циклически симметричной системой отверстий, например в ограничителе хода запорных органов на стороне всасывания комбинированного грибкового клапана поршневого компрессора высокого давления как трёхмерном цилиндрическом теле радиусом $R_e$, считает чётным число $n = 2k \geq 4$ циклически симметричных ступенчатых отверстий средним по толщине радиусом $R_i$ с осями на соосной (коаксиальной) цилиндрической поверхности радиусом $R_c$ и возможным центральное отверстие средним радиусом $R_{ic}$, при этом $0 \leq R_{ic} < R_c - R_i < R_c < R_c + R_i < R_e$ (рис. 12).

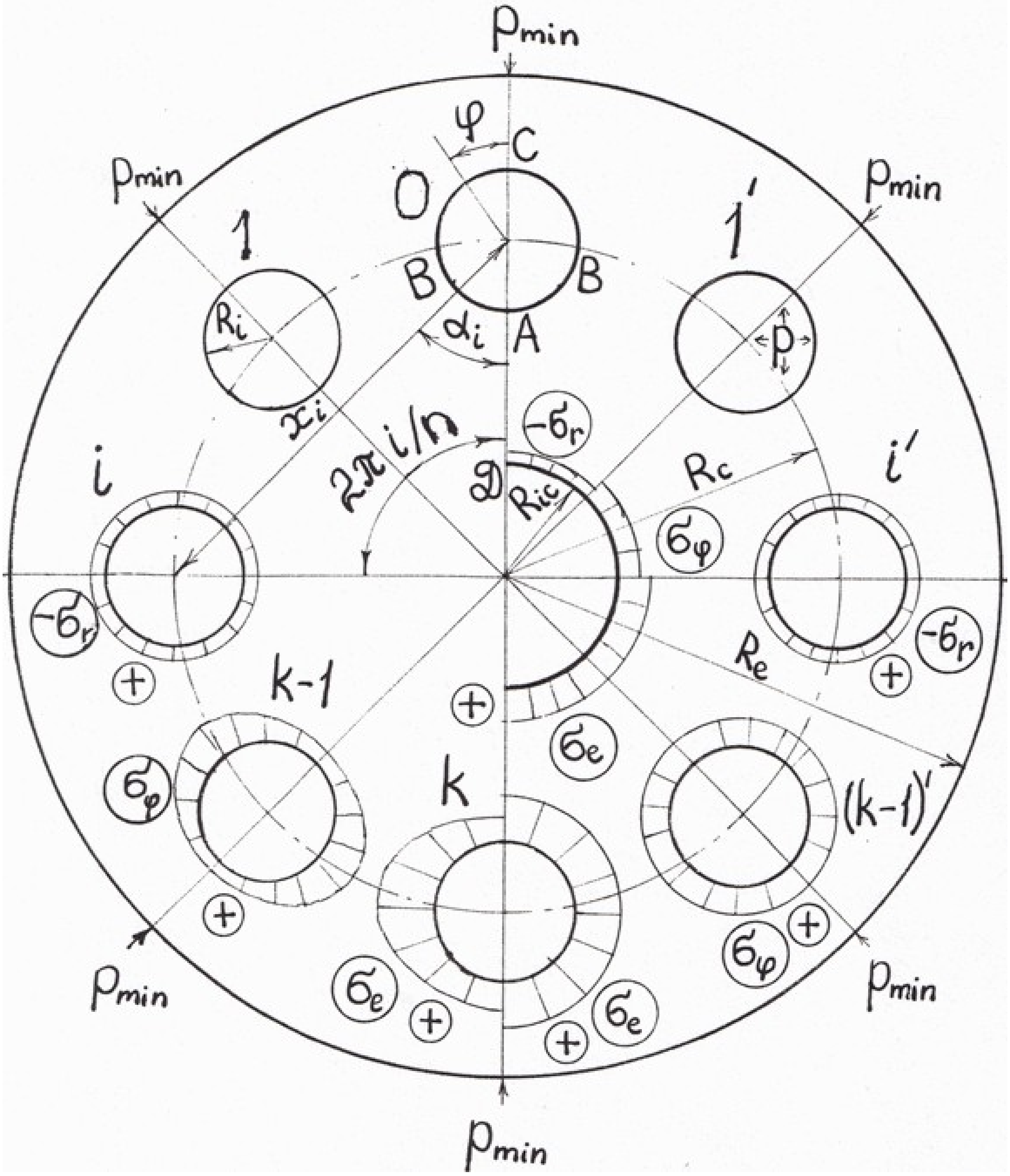



Рисунок 12. Схема к решению задачи прочности и эпюры радиальных, тангенциальных (окружных) и равносильных (эквивалентных) напряжений на пов<u>е</u>рхностях циклически симметричных отверстий в цилиндрическом теле, в т. ч. ограничителе грибкового клапана, при отсутствии (слева) и наличии (справа) центрального отверстия наилучшего радиуса.

Ограничитель нагружен давлением всасывания $p_{min}$ на внешнюю боковую поверхность и циклическим давлением p в цилиндре компрессора ($p_{min} \le p \le p_{max}$) на остальную поверхность (за вначале не учитываемым исключением уплотнительных поясков у краёв оснований $R_{si} \le r \le R_{se}$ с контактным давлением $p_s$ и их узкой внешности $R_{se} \le r \le R_e$ с давлением всасывания $p_{min}$). Напряжённое состояние ограничителя близко к плоскому и концентрируется у отверстий, где и зарождаются усталостные трещины при разрушении ограничителя.

Главным является определение концентрации напряжений на нормалях A, B, C, D (см. рис. 12) наибольших попарных сближений боковых пов<u>е</u>рхностей ограничителя и отверстий по <u>общим методам (не)малых отверстий</u> и <u>сосредоточенного сопряжённого усреднения</u>.

По общим методам (не)малых отверстий и принципу наложения (суперпозиции) диаметры отверстий предположим существенно меньшими их расстояний между собой и от боковой поверхности. Решение Ламе для цилиндра большой относительной толстостенности даёт напряжения вне произвольного отверстия 0 (см. рис. 12) от давления p в этом отверстии, в т. ч. для центров (на деле осей) всех остальных периферических отверстий в предположении их отсутствия. Для напряжений от давлений p в каждом из остальных отверстий и давления $p_{min}$ на боковую поверхность есть решение Кирша для условно бесконечной пластины с круглым отверстием, равномерно растягиваемой на противоположных краях вдоль одной оси, $\sigma_\rho = 0$, $\sigma_\varphi = \sigma(1 - 2\cos 2\varphi)$, $\tau_{\rho\varphi} = 0$, где $\sigma_\rho$, $\sigma_\varphi$, $\tau_{\rho\varphi}$ – соответственно радиальное, тангенциальное (окружное) и сдвиговое напряжения в пластине; $\varphi$ – угол, отсчитываемый от этой оси в направлении напряжения $\sigma$, растягивающего пластину на условной бесконечности.

На кромке рассматриваемого периферического отверстия 0, на рисунке 12 верхнего, радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения (с учётом концентрации напряжений у этого отверстия) от действия давлений p в паре отверстий i и i′ на равных расстояниях $r = x_i$ от оси рассматриваемого отверстия 0 составляют по формулам Кирша соответственно:

$$\sigma_{\rho ii'} = 0,\ \sigma_{\varphi ii'} = \sigma_{\varphi i} + \sigma_{\varphi i'} = 8pR_i^2x_i^{-2}\cos 2\alpha_i\cos 2\varphi,\ x_i = 2R_c\sin(\pi i/n),\ 2\alpha_i = \pi - 2\pi i/n,\ i = 1, 2, 3, \dots, k - 1;$$

от действия давлений p во всех этих парах симметричных отверстий и в непарном противоположном отверстии k составляют по формулам Кирша соответственно:

$$\sigma_{\rho 1k} = 0,\ \sigma_{\varphi 1k} = - A_kpR_i^2R_c^{-2}\cos 2\varphi,\ A_k = 2S_k - 1,\ S_k = \Sigma_{i=1}^{k-1}\cos(\pi i/k)/\sin^2(0.5\pi i/k),$$

$$S_2 = 0,\ S_3 = 4/3,\ S_4 = 4,\ S_6 = 40/3,\ S_k \approx 0.69k^2 - 2.17k + 2\ (k \geq 6);$$

от давления p в самом рассматриваемом периферическом отверстии 0 $\sigma_{\rho 0} = - p$, $\sigma_{\varphi 0} = p$;

от внутреннего давления p в центральном отверстии и от внешнего давления $p_{min}$

$$\sigma_{\rho ce} = 0,\ \sigma_{\varphi ce} = \sigma_{rN}(R_c)(1 - 2\cos 2\varphi) + \sigma_{tN}(R_c)(1 + 2\cos 2\varphi) =$$

$$2(pR_{ic}^2 - p_{min}R_e^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2) + 4(p - p_{min})R_{ic}^2R_e^2/[R_c^2(R_e^2 - R_{ic}^2)]\cos 2\varphi;$$

в итоге $\sigma_{\rho p} = \sigma_{\rho 1k} + \sigma_{\rho 0} + \sigma_{\rho ce} = 0 - p + 0 = - p$, $\sigma_{\varphi p} = \sigma_{\varphi 1k} + \sigma_{\varphi 0} + \sigma_{\varphi ce} = p + 2(pR_{ic}^2 - p_{min}R_e^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2) + \{4(p - p_{min})R_{ic}^2R_e^2/[R_c^2(R_e^2 - R_{ic}^2)] - A_kpR_i^2/R_c^2\}\cos 2\varphi$, равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности (критерию наибольших сдвиговых напряжений) $\sigma_{ep} = \sigma_{\varphi p} - \sigma_{\rho p} = \{2\alpha^2/(\alpha^2 - 1) - R_c^{-2}[A_kR_i^2 - 4R_e^2/(\alpha^2 - 1)]\cos 2\varphi\}(p - p_{min})$, $\alpha = R_e/R_{ic}$.

На кромке центрального отверстия (угол $\varphi$ отсчитывается от оси, проходящей через центр периферического отверстия 0, на рисунке 12 верхнего) радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения от действия давлений p во всех n периферических отверстиях:

$$\sigma_{\rho cn} = 0,\ \sigma_{\varphi cn} = 8p(R_i/R_c)^2S\cos 2\varphi,\ S = \cos 0 + \cos(2\pi/k) + \cos(4\pi/k) + \dots + \cos(2\pi - 2\pi/k) = 0$$

(сумма проекций на ось абсцисс неизменной при повороте на угол $2\pi/k$ системы единичных векторов из начала координат во все вершины правильного k-угольника);

от действия внутреннего давления p в центральном отверстии и от внешнего давления $p_{min}$

$$\sigma_{\rho cN} = - p,\ \sigma_{\varphi cN} = [p(R_e^2 + R_{ic}^2) - 2p_{min}R_e^2]/(R_e^2 - R_{ic}^2);$$

в итоге $\sigma_{\rho c} = \sigma_{\rho cn} + \sigma_{\rho cN} = 0 - p = - p$, $\sigma_{\varphi c} = \sigma_{\varphi cn} + \sigma_{\varphi cN} = [p(R_e^2 + R_{ic}^2) - 2p_{min}R_e^2]/(R_e^2 - R_{ic}^2)$, равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности (критерию наибольших сдвиговых напряжений) $\sigma_{ec} = \sigma_{\varphi c} - \sigma_{\rho c} = 2\alpha^2(\alpha^2 - 1)^{-1}(p - p_{min})$, $\alpha = R_e/R_{ic}$. Следствия:

1. Равносильное напряжение $\sigma_{ec}$ по контуру центрального отверстия равномерно.
2. Равносильное (эквивалентное) напряжение $\sigma_{ep}$ по контуру каждого периферического отверстия неравномерно со средней по контуру величиной $\sigma_{epm} = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\sigma_{ep}d\varphi = \sigma_{ec}$.
3. Максимальны равносильные напряжения $\sigma_{emax} = [2\alpha^2/(\alpha^2 - 1) + R_c^{-2}|A_kR_i^2 - 4R_e^2/(\alpha^2 - 1)|](p - p_{min})$ в ограничителе в точках периферических отверстий с $\cos 2\varphi = \mathrm{sign}[4R_e^2R_i^{-2} - A_k(\alpha^2 - 1)]$. При отсутствии центрального отверстия ($\alpha \rightarrow +\infty$) разрушение начинается в наиболее узких местах («шейках» перемычек между периферическими отверстиями) с $\sigma_{emax}$ и $\cos 2\varphi = - 1$. Соответствующие эпюры радиальных $\sigma_\rho$, тангенциальных (окружных) $\sigma_\varphi$ и равносильных (эквивалентных) $\sigma_e$ напряжений приведены в левой половине рисунка 12.
4. Постоянный по контурам всех отверстий минимакс $\min_\alpha\max_\varphi\sigma_e$ достигается при условии $A_k(\alpha^2 - 1) = 4R_e^2R_i^{-2}$ с наличием центрального отверстия наилучшим радиусом $R_{ic} = R_e\alpha^{-1}$, $\alpha = (1 + 4R_e^2R_i^{-2}A_k^{-1})^{1/2}$. Для сохранения общей площади проходного сечения $\pi F$, $F = 2kR_i^2 + R_e^2\alpha^{-2}$:

$$\alpha = \{1 + FR_e^{-2} + 8kA_k^{-1} + [(1 + FR_e^{-2} + 8kA_k^{-1})^2 - 4FR_e^{-2}]^{1/2}\}^{1/2}R_e/(2F)^{1/2}.$$

Соответствующие эпюры радиальных $\sigma_\rho$, тангенциальных (окружных) $\sigma_\varphi$ и равносильных (эквивалентных) $\sigma_e$ напряжений приведены в правой половине рисунка 12. Наилучший радиус центрального отверстия может и отличаться от радиуса периферических отверстий.

При наилучшем радиусе центрального отверстия наилучшим является ограничитель с наименьшим возможным значением n, так как оптимуму значения n соответствует максимум значения α, а $kA_k^{-1}$ и $A_k^{-1}$ – монотонно убывающие функции числа k. То есть при $k \geq 2$ наиболее целесообразна циклически симметричная цилиндрическая деталь с четырьмя (несколько хуже шестью) периферическими отверстиями и наилучшим центральным отверстием. При циклическом давлении p в цилиндре равносильное (эквивалентное) напряжение $\sigma_e$ на контурах отверстий изменяется от 0 до $2\alpha^2(\alpha^2 - 1)^{-1}(p_{max} - p_{min})$. Запас усталостной прочности ограничителя $f = 0.5\alpha^{-2}(\alpha^2 - 1)\sigma_0(p_{max} - p_{min})^{-1}$, где $\sigma_0$ – предел усталости материала ограничителя при пульсационном цикле с учётом масштабного фактора, температуры, действия газовой среды, а также гидростатического давления. Нижнюю оценку $\sigma_0 \geq 2\sigma_u\sigma_{-1}(\sigma_u + \sigma_{-1})^{-1}$ даёт приближение Гудмена диаграммы усталостной прочности Хэя.

По итогам анализа была изменена конструкция комбинированного грибкового клапана. Его ограничитель снабжён центральным отверстием радиусом, близким к наилучшему. Общий метод малых отверстий даёт места наибольшей концентрации напряжений и оптимизирует конструкцию комбинированного грибкового клапана, но не учитывает контактное давление $p_s$ по уплотнительным пояскам. При $R_i \to 0$ приближённое решение по общему методу малых отверстий стремится к точному, но непригодно при $R_i \to R_c\sin(\pi/n)$, когда стремится к нулю ширина «шейки» перемычки между соседними периферическими отверстиями, и даёт заметную погрешность при $R_i \approx 0.5R_c\sin(\pi/n)$ для целесообразных ограничителей.

Анализ решений Ламе и Кирша даёт: общий метод малых отверстий имеет инженерную погрешность при расстояниях между отверстиями не менее суммы их диаметров. Уточнение достигается общим методом немалых отверстий по данным о растяжении пластин с двумя или рядом отверстий перпендикулярно линии их центров при любых относительных расстояниях между ними, ведёт к формулам для наибольших равносильных (эквивалентных) напряжений $\sigma_e$ в «шейках» перемычек, то есть в местах наибольших попарных сближений отверстий между собой и с боковой поверхностью ограничителя (см. рисунок 12):

$$\sigma_{eA} = \{1+(2R_c+R_i + R_{ic})^{1/2}(2R_c - R_i - R_{ic})^{-1/2}[(\alpha^2 + 1)/(\alpha^2 - 1) - A_kR_i^2/R_c^2 + 4(\alpha^2 - 1)^{-1}R_e^2/R_c^2]\}(p - p_{min});$$

$$\sigma_{eB} = \{1+[R_c\sin(\pi/n)+R_i]^{1/2}[R_c\sin(\pi/n) - R_i]^{-1/2}[(\alpha^2+1)/(\alpha^2 - 1)+A_kR_i^2/R_c^2 - 4(\alpha^2 - 1)^{-1}R_e^2/R_c^2]\}(p - p_{min});$$

$$\sigma_{eC} = \{1 + (R_e + R_c + R_i)^{1/2}(R_e + R_c - R_i)^{-1/2}[(\alpha^2 + 1)/(\alpha^2 - 1) - A_kR_i^2/R_c^2 + 4(\alpha^2 - 1)^{-1}R_e^2/R_c^2]\}(p - p_{min});$$

$$\sigma_{eD} = [1 + (2R_c + R_i + R_{ic})^{1/2}(2R_c - R_i - R_{ic})^{-1/2}(\alpha^2 + 1)/(\alpha^2 - 1)](p - p_{min}).$$

Другое уточнение – общим методом сосредоточенного сопряжённого усреднения даже при одном порядке диаметров отверстий в ограничителе и расстояний между ними. По принципу наложения (суперпозиции) отделяя от поверхностной нагрузки исследуемое по формулам Ламе всестороннее сжатие ограничителя давлением p, рассмотрим воздействие давления $p_s$ - p по уплотнительному пояску $R_{si} \leq r \leq R_{se}$ и растяжение удельной нагрузкой $p - p_{min}$ вне уплотнительного пояска $R_{se} \leq r \leq R_e$ и по внешней боковой поверхности ограничителя $r = R_e$.

Условие равновесия элемента перемычки между соседними периферическими отверстиями: в любом её сечении зависящее от текущего радиуса r среднее по ширине радиальное напряжение $\sigma_{rm}(r)$ обратно пропорционально текущей ширине сечения перемычки. Этим определяются как функции от наибольшего номинального, или среднего по ширине, радиального напряжения $\sigma_{rm}$, имеющего место в «шейке» перемычки, следующие величины:

номинальные, или средние по ширине, радиальные напряжение $\sigma_{rm}(r)$ и деформация $\varepsilon_{rm}(r)$ в каждом сечении перемычки в пределах длины $R_c - R_i \leq r \leq R_c + R_i$ вдоль текущего радиуса r;

удлинение перемычки как интеграл $\Delta u = \int\varepsilon_{rm}(r)dr$ в пределах её длины $R_c - R_i \leq r \leq R_c + R_i$;

радиальное перемещение $u(R_c - R_i)$ внешней поверхности внутренней части $R_{ic} \leq r \leq R_c - R_i$ и радиальное перемещение $u(R_c + R_i)$ внутренней поверхности внешней части $R_c + R_i \leq r \leq R_e$.

Удлинение перемычки $\Delta u = u(R_c + R_i) - u(R_c - R_i)$. Из этого условия совместности радиальных перемещений внутренней части, перемычки и внешней части определяется наибольшее номинальное, или среднее по ширине, радиальное напряжение $\sigma_{rm}$ в «шейке» перемычки:

$$\sigma_{rm} = (R_c + R_i)\{(p - p_{min})[2R_e^2 - \mu(R_e^2 - R_{se}^2)] + \mu(p_s - p)(R_{se}^2 - R_{si}^2)\}[R_e^2 - (R_c + R_i)^2]^{-1}/ \{\pi^{-1}n[R_c\sin(\pi/n) - R_i]H + 4R_c\sin(\pi/n)Q^{-1}\mathrm{arctg}Q - \pi[R_c\sin(\pi/n) - R_i)]\},\ H = [(R_c - R_i)^2 + R_{ic}^2]/[(R_c - R_i)^2 - R_{ic}^2] + [R_e^2 + (R_c + R_i)^2]/[R_e^2 - (R_c + R_i)^2],\ Q = \{[R_c\sin(\pi/n) + R_i]/[R_c\sin(\pi/n) - R_i]\}^{1/2}.$$

Коэффициенты концентрации напряжений в точках A, B, C составляют соответственно:

$$K_A = 3.065 - 2.065R_i(R_c - R_i)/[(R_c - R_{ic})^2 - R_i^2],\ K_B = 3.065[1 - R_iR_c^{-1}\sin^{-1}(\pi/n)],$$
$$K_C = 3.065 - 2.065R_i(R_c + R_i)/[R_c(R_e - R_c) + R_i^2].$$

Тангенциальные (окружные) напряжения в точках A, B, C с учётом сжатия давлением p:

$$\sigma_{\varphi A} = K_A\pi^{-1}n[R_c\sin(\pi/n) - R_i](R_c + R_i)^{-1}[(R_c - R_i)^2 + R_{ic}^2][(R_c - R_i)^2 - R_{ic}^2]^{-1}\sigma_{rm} - p,\ \sigma_{\varphi B} = K_B\sigma_{rm} - p,$$
$$\sigma_{\varphi C} = K_C[(R_e^2 + (R_c + R_i)^2][R_e^2 - (R_c + R_i)^2]^{-1}(p - p_{min}) - 2\pi^{-1}nR_e^2[R_e^2 - (R_c + R_i)^2]^{-1}[R_c\sin(\pi/n) - R_i](R_c + R_i)^{-1}\sigma_{rm} - p.$$

На контуре каждого отверстия радиальное напряжение $\sigma_\rho = - p$.

Равносильные (эквивалентные) напряжения максимальны в точках B: $\sigma_{eB} = K_B\sigma_{rm}$.

Определимы наибольшее $\sigma_{emax}$, наименьшее $\sigma_{emin}$, среднее $\sigma_{em}$, амплитудное $\sigma_{ea}$ равносильные (эквивалентные) напряжения цикла, а по приближению Гудмена диаграммы усталостной прочности Хэя – запас усталостной прочности ограничителя $f = (\sigma_{em}/\sigma_u + \sigma_{ea}/\sigma_{-1})^{-1}$.

Общий метод сосредоточенного сопряжённого усреднения требует ЭВМ для оптимизации ограничителя, сложнее общих методов (не)малых отверстий, выявляет места концентрации напряжений, полезность центрального отверстия, учитывает давление $p_s$ по уплотнительному пояску и даёт решение, сходящееся к точному при $R_i \to 0$ и $R_i \to R_c\sin(\pi/n)$, когда к нулю стремится ширина «шейки» перемычки между соседними периферическими отверстиями.

## Заключение. Основные результаты и выводы

1. Как закономерный итог достижения цели с выполнением задач осуществлением идей созданы и развиты иерархические математическая, метрологическая, оптико-механическая и прочностная системы принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов как теоретический фундамент теорий (с открытием и обоснованием систем принципиально новых явлений и законов) и простых замкнутых общих аналитических методов рациональных комплексных инженерных исследования, проектирования и управления системами напряжённо-деформированных состояний и процессов, жёсткости, прочности и оптики трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов техники высоких давлений, в т. ч. с концентраторами напряжений, трением, сцеплением и проскальзыванием.
2. Создана и развита иерархическая математическая система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов: общие теории количественных множеств; новых действий; общих задач (систем функциональных уравнений); полных линейности оператора и линейной (не)зависимости; собственных совокупностей классов функций для множеств операторов; общие решения гармонического и бигармонического уравнений в (полу)степенных рядах (собственных классах); полная линейно-комбинационная и целочастичная (парциальная) методологии; общие (полу)степенной, интегральный методы.
3. Создана и развита иерархическая метрологическая система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, в частности общие теории, методологии и методы измерения физических величин; оценки и исправления погрешностей усреднения при измерениях неоднородных распределений; псевдорешений и всеобщих погрешности и запаса и их оптимизации; наилучших аналитических приближений к дискретным данным с их разбросом при опоре на лучшие из них и при нормально взвешенном учёте всех данных безотносительно нормальности их распределения и без исключения выбросов, в том числе для развития методов экспериментальных исследований.
4. Создана и развита иерархическая оптико-механическая система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, в частности общие теории всеобщих напряжений; иерархичности типов схем нагружения; минимизации и устранения невязок сопряжения; осесимметричного изгиба и его влияния на оптические свойства именно существенно трёхмерных цилиндрических тел; принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных процессов составного цилиндра конечной длины при его тепловой сборке

и запрессовке; комплексной оптимизации механических, прочностных и оптических свойств именно существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов и систем различных конфигураций с концентраторами напряжений, трением, сцеплением и проскальзыванием; общие (полу)степенной и интегральный аналитические методы макроэлементов как (полу)степенная и интегральная модификации аналитической методологии макроэлементов.
5. Создана и развита иерархическая прочностная система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, в т. ч. общая теория прочности материалов с открытием первых в истории всеобщих прочностных законов природы во всеобщих напряжениях, в т. ч. приведением к ним частных критериев предельных состояний и прочности, и общая теория прочности объектов с открытием и обоснованием системы явлений и законов запасов и обобщениями всеобщих прочностных законов природы с предельных состояний на непредельные, в т. ч. запасом прочности при сложном нагружении как функцией частных запасов независимых нагрузок при их наиболее опасном сочетании.
6. На основе созданных и развитых иерархических математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов созданы теории и аналитические методы расчёта, исследования и комплексной оптимизации напряжённо-деформированных состояний и процессов, жёсткости, прочности и оптики типовых существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов и систем техники высоких давлений, в т. ч. с концентраторами напряжений, трением, взаимными сцеплением и проскальзыванием, – теорий рациональных комплексных проектирования объектов и управления их системами этих ключевых свойств.
7. Приложение созданных математических, метрологических, оптико-механических и прочностных теорий и аналитических методов к впервые решаемым нетривиальным задачам для существенно трёхмерных тел из пластичных и хрупких конструкционных материалов привело к открытию и обоснованию систем принципиально новых явлений и законов механики, прочности, оптики, запаса и всеобщих явлений и законов с уточнением, развитием, обобщением и полезным дополнением классических и других известных аналитических методов определения напряжённо-деформированных состояний таких тел.
8. Достоверность иерархических математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов испытана и доказана путём аналитических и численных сопоставлений полученных формул и расчётов по ним с формулами известных аналитических решений и расчётами по ним, итогами численных методов и экспериментальными данными.
9. Теории рациональных комплексных проектирования существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов и управления их напряжённо-деформированными состояниями и процессами, жёсткостью, прочностью и оптикой, созданные иерархическими математической, метрологической, оптико-механической и прочностной системами принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, привели к обоснованию и внедрению принципиально новых методов и эффективных конструкций для техники высоких давлений, в т. ч. защищённых авторскими свидетельствами на изобретения.
10. Системы принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов существенно развивают математику, метрологию, механику и науку о прочности.
Таким образом, совокупность разработанных автором теоретических положений можно квалифицировать как обобщение аналитических методов решения задач прочности, являющееся новым крупным достижением в развитии перспективного научного направления в динамике, прочности машин, приборов и аппаратуры – создания обобщённых аналитических методов, устанавливающих основные закономерности деформирования и прочности пространственных тел применительно к рациональному проектированию элементов конструкций из различных материалов для высоких удельных нагрузок. Кроме того, в этой докторской диссертации изложены научно обоснованные технические решения актуальных задач рационального проектирования типовых элементов конструкций в технике для высокого давления, внедрение которых позволяет обеспечить существенное повышение

прочности и других основных рабочих характеристик и снижение материалоёмкости и тем самым вносит значительный вклад в ускорение научно-технического прогресса.

**Список главных из 105 научных публикаций с основным содержанием настоящей докторской диссертации**


1. Гелимсон Лев Г. Циклически нагруженный двухслойный цилиндр с автофретированным внешним слоем // Конструирование, исследование, технология и организация производства компрессорных машин: Тематич. сб. науч. тр. Сумы: ВНИИкомпрессормаш, 1977. С. 70–76.
2. К уточнению величины контактного давления в составных цилиндрах / А. В. Асаёнок, Л. Г. Гелимсон, Д. В. Муриков, Б. И. Огурцов // Динамика и прочность машин. 1978. 27. С. 49–52.
3. Исследование напряжённо-деформированного состояния ограничителя грибкового клапана / Лев Г. Гелимсон, Б. И. Огурцов, А. В. Рубаненко, Е. А. Шерстюк // Исследование, конструирование и расчёт холодильных и компрессорных машин: Тематич. сб. тр. М.: ВНИИхолодмаш, 1979. С. 181–189.
4. Гелимсон Лев Г., Огурцов Б. И., Шерстюк Е. А. Исследование прочности цельнолитого корпуса прямоточного клапана // Совершенствование холодильных и компрессорных машин в процессе исследования и проектирования: Тематич. сб. тр. М.: ВНИИхолодмаш, 1981. С. 180–188.
5. Гелимсон Лев Г. К исключению погрешности усреднения при обработке измерительной информации // Пути совершенствования, интенсификации и повышения надёжности аппаратов в основной химии: Второе Всесоюз. науч.-техн. совещ. Сумы, 1982. С. 144–147.
6. Гелимсон Лев Г. Электротензометрия поверхностей в зонах отверстий // Пути совершенствования, интенсификации и повышения надёжности аппаратов в основной химии: Второе Всесоюз. науч.-техн. совещ. Сумы, 1982. С. 148–151.
7. Гелимсон Лев Г., Каминский А. А., Каринцев И. Б. Определение необходимого количества жидкости и энергии гидроиспытания сосуда высокого давления // Пути совершенствования, интенсификации и повышения надёжности аппаратов в основной химии: Второе Всесоюз. науч.-техн. совещ. Сумы, 1982. С. 152–155.
8. Гелимсон Лев Г. К оптимизации циклически нагруженного двухслойного цилиндра // Проблемы оптимизации в машиностроении: Семинар-совещ. Харьков, 1982. С. 42.
9. Гелимсон Лев Г. К инженерному методу расчёта прочности сотового уплотнения вала турбокомпрессора // Третье Всесоюз. науч.-техн. совещ. по уплотнительной технике. Сумы, 1982. С. 109–110.
10. Гелимсон Лев Г. К учёту неравномерных распределений контактных давлений по уплотнительным и заниженным разгрузочным пояскам узла цилиндра поршневого компрессора // Третье Всесоюз. науч.-техн. совещ. по уплотнительной технике. Сумы, 1982. С. 161–162.
11. Исследование прочности оргстекла в условиях сложного напряжённого состояния / О. Е. Ольховик, А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон и др. // Проблемы прочности. 1983. 8. С. 77–79.
12. А. с. 1054187 СССР. Иллюминатор высокого давления / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон. Опубл. 15.11.1983, Бюл. 42.
13. А. с. 1057364 СССР. Иллюминатор высокого давления / Лев Г. Гелимсон, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский. Опубл. 30.11.1983, Бюл. 44.
14. А. с. 1063695 СССР. Иллюминатор / В. В. Бортовой, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон. Опубл. 30.12.1983, Бюл. 48.
15. А. с. 1068342 СССР. Иллюминатор высокого давления / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон. Опубл. 23.01.1984, Бюл. 3.
16. А. с. 1082674 СССР. Иллюминатор высокого давления / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон. Опубл. 30.03.1984, Бюл. 12.
17. Ol’khovik O. E., Kaminskii A. A., Gelimson Lev G. et al. Study of the strength of acrylic plastic under a complex stress state. Strength Mater. (USA). 15 (1984). No. 8. P. 1127–1129.

18. А. с. 1134462 СССР. Иллюминатор высокого давления / В. В. Бортовой, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон, А. А. Каминский. Опубл. 15.01.1985, Бюл. 2.
19. А. с. 1191947 СССР. Многопроводный электроввод / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон. Опубл. 15.11.1985, Бюл. 42.
20. Гелимсон Лев Г., Каминский А. А., Каринцев И. Б. О прочностной оптимизации плоскопараллельных глубоководных иллюминаторов // Динамика и прочность машин. 1985. 41. С. 108–114.
21. О связи прочности стекла с числом трещин при разрушении / А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон, И. Б. Каринцев, О. К. Морачковский // Проблемы прочности. 1985. 12. С. 44–45.
22. Прочность дисковых иллюминаторов из оптического стекла / А. А. Каминский, А. В. Ридченко, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон // Динамика и прочн. машин. 1985. 42. С. 47–50.
23. Kaminskii A. A., Gelimson Lev G., Karintsev I. B., Morachkovskii O. K. Relationship between the strength of glass and the number of cracks at fracture. Strength Mater. (USA). 17 (1986). No. 12. P. 1691–1693.
24. Гелимсон Лев Г. Напряжённо-деформированное состояние и оптические свойства смотровых окон. Глава IV // Несущие и светопрозрачные элементы конструкций из стекла / Г. С. Писаренко, К. К. Амельянович, И. Б. Каринцев; под ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наукова думка, 1987. С. 132–191.
25. А. с. 1323808 СССР. Уплотнение разъёмного соединения / Лев Г. Гелимсон, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский. Опубл. 15.07.1987, Бюл. 26.
26. О напряжённо-деформированном состоянии цилиндрического стеклоэлемента иллюминатора / И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон, А. А. Каминский, В. В. Усенко // Динамика и прочность машин. 1988. 48. С. 32–35.
27. А. с. 1387052 СССР. Многопроводный электроввод / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон и др. Опубл. 07.04.1988, Бюл. 13.
28. А. с. 1432618 СССР. Герметичный ввод / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, В. Н. Покотило, Лев Г. Гелимсон, В. В. Усенко, А. И. Дегтяренко. Опубл. 23.10.1988, Бюл. 39.
29. А. с. 1456827 СССР. Способ испытания оболочек внешним гидростатическим давлением / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, А. В. Васильев, Лев Г. Гелимсон, А. Р. Рахимов. Опубл. 07.02.1989, Бюл. 5.
30. А. с. 1588964 СССР. Сосуд высокого давления / В. В. Усенко, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон. Опубл. 30.08.1990, Бюл. 32.
31. А. с. 1601675 СССР. Узел соединения кабеля со штепсельным разъёмом / В. А. Орлов, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон. Опубл. 23.10.1990, Бюл. 39.
32. А. с. 1603109 СССР. Сосуд высокого давления / В. В. Усенко, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон. Опубл. 30.10.1990, Бюл. 40.
33. А. с. 1622681 СССР. Сосуд высокого давления / Лев Г. Гелимсон, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский и др. Опубл. 23.01.1991, Бюл. 3.
34. А. с. 1634898 СССР. Стенд с защитным устройством / В. В. Усенко, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон. Опубл. 15.03.1991, Бюл. 10.
35. Гелимсон Лев Г. Напряжённо-деформированное состояние стеклоэлементов иллюминаторов // Проблемы прочности стекла и стеклокристаллических материалов: Всесоюзный семинар. Константиновка, 1991. С. 7–8.
36. Гелимсон Лев Г. Прочность стеклоэлементов иллюминаторов // Проблемы прочности стекла и стеклокристаллич. материалов: Всесоюз. семинар. Константиновка, 1991. С. 8–10.
37. А. с. 1645931 СССР. Устройство для подводного фотографирования / Лев Г. Гелимсон, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский, А. П. Манжос. Опубл. 30.04.1991, Бюл. 16.
38. А. с. 1751554 СССР. Герметичное разъёмное соединение ёмкости / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон, М. В. Олефиренко. Опубл. 30.07.1992, Бюл. 28.
39. Амельянович К. К., Гелимсон Лев Г., Каринцев И. Б. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов // Оптический журнал. 1992. 11. С. 11–15.

40. Гелимсон Лев Г. Обобщение аналитических методов решения задач прочности. Сумы: Друкар, 1992. 20 с.
41. Gelimson Lev G. General Strength Theory. Sumy: Drukar Publishers, 1993. 64 pp.
42. Амельянович К. К., Гелимсон Лев Г., Каринцев И. Б. К вопросу о критериальной оценке прочности цилиндрич. стеклоэлементов иллюминаторов // Пробл. прочн. 1993. 10. С. 82–88.
43. Гелимсон Лев Г. Метод обобщения критериев предельных состояний // Технология и качество стекла: Международная науч.-техн. конференция. Константиновка, 1993. С. 98–100.
44. Гелимсон Лев Г. Метод линейной коррекции критериев предельных состояний // Технология и качество стекла: Междун. науч.-техн. конф. Константиновка, 1993. С. 100–101.
45. Гелимсон Лев Г. Обобщённое определение коэффициента запаса // Технология и качество стекла: Международная научно-техническая конференция. Константиновка, 1993. С. 102–103.
46. Гелимсон Лев Г. Аналитический метод макроэлементов в осесимметричных упругих задачах // Технол. и кач. стекла: Междун. науч.-техн. конф. Константиновка, 1993. С. 104–106.
47. Гелимсон Лев Г. Обобщённые методы решения функциональных уравнений и их систем // Технология и качество стекла: Междун. науч.-техн. конф. Константиновка, 1993. С. 106–108.
48. Amel’yanovich K. K., Gelimson Lev G., Karintsev I. B. Stress-strain state and strength of transparent elements of portholes. Sov. J. Opt. Technol. (USA). 59 (1993). No. 11. P. 664–667.
49. Amel’yanovich K. K., Gelimson Lev G., Karintsev I. B. Problem of the criterial evaluation of the strength of cylindrical glass elements of illuminators. Strength Mater. 25 (1994). 10. P. 772–777.
50. Gelimson Lev G. The generalized structure for critical state criteria // Transactions of the Ukraine Glass Institute. 1994. Vol. 1. P. 204–209.
51. Gelimson Lev G. The method of least normalized powers and the method of equalizing errors to solve functional equations // Transactions of the Ukraine Glass Institute. 1994. Vol. 1. P. 209–213.
52. Gelimson Lev G. General Estimation Theory // Transact. Ukr. Glass Inst. 1994. 1. P. 214–221.

**Приложения. Система дальнейших математических, метрологических, механических и прочностных обобщений. Справки о практическом использовании и акты внедрения основных результатов настоящей докторской диссертации**

П.1. Открытие и доказательство необходимости бигармоничности функции напряжений Лява для точного выполнения уравнений равновесия и совместности деформаций

П.2. Общая теория осесимметричного (без объёмных сил и кручения) деформирования трёхмерного цилиндрического тела, нагруженного по схеме основного типа с одним свободным торцом

П.3. Теории полной линейной зависимости и полной линейной независимости системы и полной линейности оператора (применительно к бесконечным линейным комбинациям)

П.4. Всеобщая погрешность псевдорешения системы функциональных уравнений и система общих методов его оптимизации

П.5. Аддитивный и мультипликативный методы определения окрестностей и запасов множества в гильбертовом пространстве

П.6. Открытие и теория явления и сущности неустойчивости знака с нарушением однозначности степени с отрицательным основанием и дробным показателем с нечётными числителем и знаменателем

П.7. Открытие и теория явления и сущности неустойчивости знака с нарушением однозначности извлечения корня как обратного действия для возведения в степень отрицательного основания с дробным показателем с нечётными числителем и знаменателем

П.8. Общая теория точечной и окрестной равносильной устойчивости

П.9. Открытие и теория явления и сущности невозможности окрестной равносильной устойчивости возведения отрицательного основания в степень

П.10. Открытие и теория явления и сущности невозможности окрестной равносильной устойчивости извлечения корня (как обратного действия для возведения в степень) из отрицательной величины

П.11. Общая теория дополнительных альтернативных новых действий
П.12. Теория альтернативного минус-умножения
П.13. Теория альтернативного минус-деления
П.14. Теория альтернативного минус-остепенения (минус-возведения в степень)
П.15. Теория альтернативного вектор-остепенения (вектор-возведения в степень)
П.16. Теория альтернативного минус-укоренения (минус-извлечения корня)
П.17. Теория обобщения степенных функций на отрицательные основания минус-степенными функциями
П.18. Теория обобщения показательных функций на отрицательные основания минус-показательными функциями
П.19. Теория обобщения степенно-показательных функций на отрицательные основания минус-степенно-показательными функциями
П.20. Развитие теории и алгоритм аналитического приближения предельных поверхностей в пространстве приведённых напряжений
П.21. Дополнительные результаты проверки обобщённых аналитических методов решения задач прочности
П.22. Акт внедрения результатов исследований напряжённо-деформированного состояния глубоководных иллюминаторов в Ленинградском институте точной механики и оптики
П.23. Акт внедрения результатов диссертационной работы в НИПИокеангеофизика
П.24. Акт внедрения результатов докторской диссертации в Институте проблем прочности Академии Наук Украины
П.25. Справка об использовании результатов диссертационной работы в Сумском ФТИ
П.26. Справка об использовании результатов докторской диссертации в НПП «Сплав-Т»
П.27. Акт внедрения результатов докторской диссертации в НИИкомпрессормаш
П.28. Акт внедрения результатов докторской диссертации в Украинском Гос. инст-те стекла

CONTRIBUTOR’S PROFILE & ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ


| | |
|---|---|
| Name | Gelimson Lev Grigorevic, literary and artistic pseudonym Leo Himmelsohn |
| Ф.И.О. (полностью) | Гелимсон Лев Григорьевич, литературно-художественный псевдоним Лео Гимельзон |
| Degree<br>Current position | Ph. D. & Dr. Sc. in Engineering in the section “Physical and Mathematical Sciences” by the Highest Attestation Commission Classifier<br>Director \| Director, Producer, Literary and Artistic Manager |
| Учёная степень<br>Должность | доктор технических наук в разделе «Физико-математические науки» по Классификатору Высшей Аттестационной Комиссии, директор \| директор, продюсер и литературно-художественный руководитель |
| Institutional affiliation | Academic Institute for Creating Universal Sciences, Munich, Germany<br>Multilingual Literary and Musical Theater, Munich, Germany |
| Место работы | Академический институт создания всеобщих наук, Многоязычный литературно-музыкальный театр, Мюнхен, Германия |
| e-mail, эл. почта | Leohi@mail.ru |
| Postal address<br>Почтовый адрес | Ph. D. & Dr. Sc. Lev Gelimson, Westendstrasse 68, D-80339 Munich, Germany |
| Science Index (SPIN) | 8046-6818 |
| Scopus ID | 6505889792 |
| Researcher ID | R-5007-2016 |
| ORCID ID | 0000-0003-0627-84 |